

KLASY DRUGIE

- a) kwadratem liczby naturalnej,
b) sześcianiem liczby naturalnej?

Zadanie 2. Ile cyfr ma najmniejsza liczba naturalna podzielna przez 275, której suma cyfr jest równa 275?

Zadanie 3. a) Wykazać, że liczba $a = 0,12345\dots101112\dots$, powstała przez wypisanie po przecinku wszystkich kolejnych liczb naturalnych, jest niewymierna.

b) Wykazać, że liczba $b = 0,2481632 \dots 10242048 \dots$, powstała przez wypisanie po przecinku wszystkich kolejnych potęg dwójki, jest niewymierna.

Zadanie 4. Dla danej liczby naturalnej n wyznaczyć maksymalną potęgę dwójki dzielącą liczbę $7^n - 1$.

Zadanie 5. Zbiór M składa się z 2005 różnych liczb naturalnych. Wykazać, że można wybrać trzy różne liczby $a, b, c \in M$ takie, że $a(b - c)$ dzieli się przez 2005.

Zadanie 6. Prostokąty $P_1, P_2, \dots, P_n$ pokrywają całkowicie figurę $\mathcal{F}$ o polu 1. Wykazać, że przynajmniej jeden z tych prostokątów ma obwód nie mniejszy od $4/\sqrt{n}$.

Zadanie 7. Rozwiązać równania:

a) $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$; b) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 0$

Zadanie 8. a) Wielomian $W(x)$ stopnia $2n + 1$ ma współczynniki całkowite. Wykazać, że jeśli istnieją różne liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ takie, że

$$|W(x_1)| = |W(x_2)| = \cdots = |W(x_{2n+1})| = 1,$$

to $W(x)$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

b) Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia 7 o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeśli istnieje pięć różnych liczb całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_5$ takich, że

$$|W(x_1)| = |W(x_2)| = \cdots = |W(x_5)| = 1,$$

to $W(x)$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 9. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 2$ rozwiązać układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 2x_1^2 - 1 \\ x_3 = 2x_2^2 - 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = 2x_{n-1}^2 - 1 \\ x_1 = 2x_n^2 - 1 \end{array} \right.$$

Zadanie 10. Rozwiązać równanie

$$x^2 - x + [x]^2 - [x] = 1 + x[x],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- Zadanie 11.** Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są nieujemne oraz $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Jaka największa wartość może przyjąć suma $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$?
- Zadanie 12.** Na bokach równoległoboku zbudowano kwadraty, tak że każdy kwadrat ma jeden bok wspólny z równoległobokiem oraz nie ma innych punktów wspólnych. Udowodnić, że środki tak otrzymanych kwadratów tworzą kwadrat.
- Zadanie 13.** Dany jest czworokąt, którego dwa przeciwległe kąty są proste; długości boków przy jednym z kątów prostych wynoszą a i b , długości boków przy drugim kącie prostym są równe. Obliczyć odległość między wierzchołkami przy kątach prostych.
- Zadanie 14.** Na płaszczyźnie dana jest prosta ℓ oraz dwa punkty A, B nie należące do ℓ . Wyznaczyć zbiór środków ciężkości wszystkich trójkątów ABP takich, że P należy do prostej ℓ .
- Zadanie 15.** Czworoscian foremny o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną, otrzymując czworokąt o minimalnym obwodzie. Wyznaczyć ten obwód.