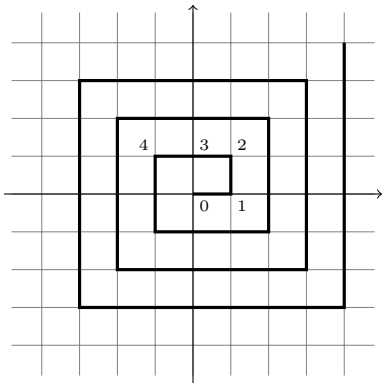
XIV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - juniorzy

28 maja 2022 r.

1. Nieskończona łamana przedstawiona na poniższym rysunku nosi nazwę *spirali Ulama*.



Kolejne punkty kratowe (czyli punkty o obu współrzędnych całkowitych) należące do tej łamanej numerujemy kolejnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi, jak na rysunku. Jaki numer będzie miał punkt (n, n)?

2. Pokaż, że istnieją dodatnie liczby niewymierne a, b takie, że

$$a+b, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad \text{oraz} \quad ab$$

są liczbami całkowitymi.

3. Kwadrat $ABCD$ ma bok długości 2022. Punkty K, L, M, N leżą na bokach AB, BC, CD, DA tego kwadratu. Wyznacz największą możliwą długość obwodu czworokąta $KLMN$. Odpowiedź uzasadnij.

4. Liczba $n \geqslant 2$ jest całkowita. Liczby od 1 do $n-1$ zapisano obok siebie (w systemie dziesiętnym) i policzono, ile razy występuje w tym napisie każda z cyfr. Okazało się, że każda z cyfr 1, 2, 3, ...,9 występuje tyle samo razy. Pokaż, że n jest potęgą liczby 10.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).

2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadania należy przepisać jego tekst na oddzielnym arkuszu.

3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.

4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.

5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie `konkurs.wi.pb.edu.pl` do 1 czerwca 2022 r.

6. Zakończenie konkursu odbędzie się dnia 10 czerwca 2022 r.