



VII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy drugie

23 maja 2015 r.

1. Liczby rzeczywiste a, b, c są takie, że liczby $a^3 - b^3, b^3 - c^3, c^3 - a^3$ tworzą (w pewnej kolejności) ciąg arytmetyczny. Wykazać, że pewne dwie spośród liczb a, b, c są równe.

2. Na boku AB trójkąta ostrokątnego ABC wyznaczyć punkt taki, aby odległość między jego rzutami prostopadłymi na boki AC i BC była możliwie najmniejsza.

3. Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n jeśli $0 \leq x \leq 2n$, to

$$(x+1)^n \geq x^n + (x-1)^n.$$

4. W pola kwadratowej tablicy $n \times n$ wpisano kolejno rzędami liczby $1, 2, \dots, n^2$, tak jak na rysunku poniżej dla $n = 3$. *Główną przekątną* nazywamy przekątną łączącą liczby 1 i n^2 ; jej pola są pokolorowane na rysunku. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb n takich, że wśród liczb na głównej przekątnej są dokładnie dwa kwadraty liczb całkowitych.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej
<http://konkurs.ptm.pb.edu.pl/> w dniu 26 maja 2015 r.