



IV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy drugie

26 maja 2012 r.

1. Moneta prawdziwa waży 10 g, a fałszywa 9 g. Zbiór 2013 monet jest taki, że po wyjęciu z niego dowolnej monety pozostałe można podzielić na dwa stosy o równych wagach. Ile może być w tym zbiorze monet fałszywych?
2. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami wielomianu $x^2 - 15x + 3$. Udowodnić, że $x_1^{2012} + x_2^{2012}$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 3^{1006} .
3. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Punkt A' jest symetryczny do A względem środka boku BC , a punkt B' jest symetryczny do B względem środka boku AC . Odcinek AB' przecina okrąg opisany na $\triangle ABC$ w punkcie D ($D \neq A$). Udowodnić, że odcinki $A'D$ i AD są prostopadłe.
4. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian $F(x)$ o współczynnikach rzeczywistych taki, że $F(1) = 1$ oraz

$$F(2n) = 2F(n) + n^2$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej n .

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej
<http://konkurs.ptm.pb.edu.pl/> w dniu 29 maja 2012 r.