



Podlaski Konkurs Matematyczny

Zadania konkursowe - klasy pierwsze

26 maja 2007 r.

1. Wykazać, że jeśli x i y są liczbami całkowitymi, to liczba

$$xy^5 - x^5y$$

jest podzielna przez 30.

2. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano dwa kwadraty $ABKL$ i $ABMN$, przy czym kwadrat $ABKL$ nie ma wspólnych punktów wewnętrznych z trójkątem ABC , zaś kwadrat $ABMN$ zawiera trójkąt ABC . Niech S , T będą środkami tych kwadratów (tzn. punktami przecięcia ich przekątnych). Wykazać, że trójkąt SCT jest prostokątny i wyznaczyć długości jego boków wiedząc, że $|BC| = a$, $|AC| = b$ oraz $a > b$.

3. Na okręgu rozmieszczamy liczby według następującej zasady. W pierwszym kroku wpisujemy liczby 1 i 2 tak aby leżały naprzeciw siebie (tzn. na końcach pewnej średnicy). W drugim kroku, na środku pomiędzy każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich sumę (zatem po dwóch krokach w czterech punktach okręgu będą wpisane liczby 1, 3, 2, 3). Czynność tę kontynuujemy, tzn. w k -tym kroku na środku pomiędzy każdymi dwiema sąsiednimi liczbami, wpisanymi we wcześniejszych $k - 1$ krokach, wpisujemy ich sumę. Wyznaczyć sumę wszystkich liczb rozmieszczonych na okręgu po wykonaniu n kroków. Odpowiedź uzasadnić.

4. Wewnątrz prostokąta $ABCD$ wybrano dowolny punkt X . Niech K , L , M i N oznaczają kolejno rzuty prostokątne punktu X na boki AB , BC , CD i DA . Wykazać, że przynajmniej jeden z prostokątów $AKXN$ lub $CMXL$ ma pole nie większe niż jedna czwarta pola prostokąta $ABCD$.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej <http://www.ptm.pb.bialystok.pl> w dniu 29 maja 2007r.