



Podlaski Konkurs Matematyczny

Zadania konkursowe - klasy pierwsze

27 maja 2006 r.

1. Ścianami ośmiościanu foremego są trójkąty równoboczne o boku długości n . Każdą krawędź ośmiościanu dzielimy na n odcinków długości 1, a następnie prowadzimy wszystkie odcinki równoległe do krawędzi o końcach w punktach podziału. Odcinki te wraz z krawędziami ośmiościanu wyznaczają podział każdej ściany na trójkąty równoboczne o boku 1. Ile jest różnych punktów będących wierzchołkami tych trójkątów i ile jest wszystkich odcinków długości 1 będących bokami tych trójkątów. (Model ośmiościanu foremego można zbudować sklejając podstawami dwa przystające ostrosłupy o podstawach kwadratowych i ścianach bocznych będących trójkątami równobocznymi).

2. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

3. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ taki, że przekątne AD , BE oraz CF przecinają się w jednym punkcie O . Niech S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 i S_6 będą kolejno polami trójkątów AOB , BOC , COD , DOE , EOF i FOA . Udowodnić, że $S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6$.

4. W trójkącie ABC długości wszystkich trzech wysokości są całkowitymi wielokrotnościami promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że ABC jest trójkątem równobocznym.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej <http://www.ptm.pb.bialystok.pl> w dniu 30 maja 2006r.