



Konkurs Matematyczny Klas Pierwszych

Zadania konkursowe

31 maja 2003 r.

1. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe oraz wiadomo, że

$$AB = AC = AD = a \quad \text{ i } \quad BC = b.$$

Wyznaczyć długość przekątnej BD .

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite m dla których liczba $m^4 + m^2 - 2$ jest podzielna przez 9.

3. Niech a, b będą liczbami dodatnimi. Wykazać, że nierówność

$$\frac{ax + by}{2} \leq \sqrt{\frac{ax^2 + by^2}{2}}$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b \leq 2$.

4. Mieszkańcy pewnej matematycznej krainy posługują się walutą o nazwie MAT. W obiegu są banknoty o nominale 100 MATÓW oraz monety o pięćdziesięciu różnych nominałach: $n_1, n_2, \dots, n_{50}$ MATÓW, przy czym $n_i \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ dla $i = 1, 2, \dots, 50$. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 100$ kwota w wysokości k MATÓW może być wypłacona przy pomocy co najwyżej dwóch monet i pewnej ilości banknotów 100 MATOWYCH.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej <http://www.ptm.pb.bialystok.pl> w dniu 1 czerwca 2003r.