



XV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy trzecie

18 marca 2023 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki liczb całkowitych (x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ z^2 - xy = 1. \end{cases}$$

2. Punkt D leży we wnętrzu trójkąta ABC i spełnia warunki $\sphericalangle ADB = 90^\circ$, $\sphericalangle BDC = 150^\circ$, $\sphericalangle CDA = 120^\circ$. Udowodnij, że istnieje punkt E różny od D taki, że jeśli F jest odbiciem E względem AD , G jest odbiciem F względem BD , zaś H jest odbiciem G względem CD , to $H = E$.

3. Niech $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $a_n \neq 0$ będą cyframi liczby $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ zapisanej w systemie dziesiętnym. Wykaż, że A jest podzielna przez 19 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $2^n a_0 + 2^{n-1} a_1 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$ jest podzielna przez 19.

4. W Konkursie Matematycznym uczestniczy 7 osób z Niebiałystoku. Wśród nich jest 10 par osób znających się. Pokaż, że istnieją wśród nich cztery osoby A, B, C, D takie, że A zna B , B zna C , C zna D oraz D zna A .

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie konkurs.wi.pb.edu.pl do 21 marca 2023 r.
6. W tym roku tradycyjnego zakończenia konkursu nie przewidujemy; nagrody zostaną dostarczone do szkół.