

Podlaski Konkurs Matematyczny 2006
Rozwiązania zadań przygotowawczych - klasy drugie

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, które są 11 razy większe od sumy swoich cyfr.

Rozwiązanie.

Niech $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ będzie liczbą taką, że $A = 11(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$, gdzie $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Z łatwością stwierdzamy, że

$$(10^n - 11)a_n + (10^{n-1} - 11)a_{n-1} + \dots + 89a_2 = 10a_0 + a_1 = \overline{a_0 a_1}.$$

Po prawej stronie mamy liczbę co najwyżej dwucyfrową (w systemie dziesiętnym), a więc taka jest liczba stojąca po lewej stronie powyższej równości. Wynika stąd, że $n \leq 2$. Nietrudno sprawdzić, że nie ma liczb jedno i dwucyfrowych spełniających warunki zadania, zaś dla $n = 2$ prosty rachunek pokazuje, że jedyną liczbą jest $A = 198$.

□

* * *

Zadanie 2. Niech $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x . Wykazać, że jeśli $\{a\} + \{1/a\} = 1$, to a nie jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie.

Przypuścimy, że dla pewnego ułamka nieskracalnego $a = m/n$ (tzn. m, n są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi) zachodzi równość $\{a\} + \{1/a\} = 1$. Zauważmy, że $m/n + n/m$ jest wtedy liczbą całkowitą. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $|m| < |n|$. Jednak $m/n + n/m = (m^2 + n^2)/mn$. W szczególności wynika stąd, że $m \mid n^2$ oraz $n \mid m^2$, a więc $1 < |m|$. Dla dowolnego dzielnika pierwszego p liczby m mamy podzielność $p \mid n^2$, czyli $p \mid n$, wbrew założeniu, że m i n są względnie pierwsze.

Zauważmy, że liczba $a = 2 - \sqrt{3}$ spełnia równanie $\{a\} + \{1/a\} = 1$.

□

* * *

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną oraz $0 \leq x < 1$, to

$$1 - x^{2n} > 2nx^n(1 - x).$$

Rozwiązanie.

Skorzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną o średnią geometryczną.

$$\begin{aligned} \frac{1 - x^{2n}}{1 - x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^{2n-1} \geq 2n \sqrt[2n]{1 \cdot x \cdot x^2 \dots x^{2n-1}} \\ &= 2n \sqrt[2n]{x^{1+2+\dots+(2n-1)}} = 2n \sqrt[2n]{x^{n(2n-1)}} = 2nx^n x^{-\frac{1}{2}} > 2nx^n. \end{aligned}$$

□

* * *

Zadanie 4. Dla danej liczby naturalnej n wyznaczyć sumę:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Rozwiązanie.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{1}{4} \left(\frac{4k^2-1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \end{aligned}$$

Rozważana suma S_n jest więc równa

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{4} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{4} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{4} + \frac{n}{4(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

□

* * *

Zadanie 5. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór wielokątów taki, że każde dwa wielokąty mają punkt wspólny. Wykazać, że istnieje prosta mająca punkty wspólne z każdym z wielokątów.

Rozwiązanie.

Niech $W_1, W_2, \dots, W_n$ będą rozważanymi wielokątami. Rozważmy dowolną prostą ℓ leżącą w tej samej płaszczyźnie co wielokąty W_j , a następnie rzutujemy je prostopadłe na ℓ . Oczywiście obrazem wielokąta W_j będzie pewien odcinek $L_j P_j$ prostej ℓ . Wśród prawych końców otrzymanych rzutów wybierzmy pierwszy, powiedzmy P_k , licząc z lewej strony. Ponieważ dowolne dwa wielokąty mają punkty wspólne, więc ich rzuty na ℓ też mają punkty wspólne. Stąd wynika, że P_k należy do rzutu każdego wielokąta. Teraz z łatwością stwierdzamy, że prosta prostopadła do ℓ w punkcie P_k przecina każdy z wielokątów W_j . □

* * *

Zadanie 6. Punkty M, P są środkami boków BC i CD wypukłego czworokąta $ABCD$. Wykazać, że jeśli $AP + AM = a$, to czworokąt $ABCD$ ma pole mniejsze niż $a^2/2$.

Rozwiązanie.

Poprowadźmy przekątną BD czworokąta $ABCD$. Oznaczmy przez K punkt przecięcia AP z BD . Ponieważ M i P są środkami boków trójkąta BCD mamy: $MP \parallel BD$ oraz $S_{MKP} = S_{MCP}$. Z wypukłości czworokąta $ABCD$ wynika, że K leży między A i P , a więc $S_{MPC} = S_{MKP} < S_{AMP}$. Przyjmując, że $AP = x$ i stosując nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S_{AMCP} &= S_{AMP} + S_{MCP} < 2S_{AMP} \leqslant AM \cdot AP \\ &= x(a-x) \leqslant \left(\frac{x+(a-x)}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Z drugiej strony trójkąty APD i APC mają równe wysokości i podstawy ($CP = PD$), a więc ich pola są równe. Analogicznie $S_{AMC} = S_{AMD}$. Zatem

$$S_{ABCD} = 2S_{AMCP} < \frac{a^2}{2}.$$

□

Zadanie 7. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x)$$

dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f jest funkcją okresową.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to

$$\begin{aligned} f(x+2) + f(x) &= \sqrt{2}f(x+1) = \sqrt{2}(\sqrt{2}f(x) - f(x-1)) \\ &= 2f(x) - \sqrt{2}f(x-1), \end{aligned}$$

czyli

$$f(x+2) = f(x) - \sqrt{2}f(x-1).$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} f(x+4) &= f(x+2) - \sqrt{2}f(x+1) \\ &= f(x) - \sqrt{2}(f(x-1) + f(x+1)) = -f(x). \end{aligned}$$

czyli

$$f(x+8) = -f(x+4) = f(x).$$

Funkcja $f(x)$ jest zatem okresowa, a liczba 8 jest jej okresem.

□

Zadanie 8. W czworokącie $ABCD$ o polu S obrano punkt O taki, że

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S.$$

Wykazać, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, zaś O jest jego środkiem.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że dla dowolnego trójkąta XYZ jego pole można wyrazić jako połowę iloczynu długości ramion trójkąta i sinusa kąta między nimi. Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy:

$$\frac{XY^2 + XZ^2}{2} \geq XY \cdot XZ \geq XY \cdot XZ \sin \angle YXZ = 2S_{XYZ},$$

gdzie S_{XYZ} oznacza pole trójkąta XYZ . W powyższych nierównościach zachodzą równości wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle YXZ = 90^\circ$ oraz $XY = XZ$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} 2S &= OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \\ &= \frac{OA^2 + OB^2}{2} + \frac{OB^2 + OC^2}{2} + \frac{OC^2 + OD^2}{2} + \frac{OD^2 + OA^2}{2} \\ &\geq OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA \\ &\geq 2S_{AOB} + 2S_{BOC} + 2S_{COD} + 2S_{DOA} = 2S \end{aligned}$$

Widzimy, że w powyższych nierównościach muszą zajść równości, a więc na mocy wcześniejszej uwagi odległości punktu O od wierzchołków czworokąta są jednakowe i

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ.$$

Stąd wnosimy, że $ABCD$ jest kwadratem. □

* * *

Zadanie 9. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ (przy czym $n \geq 2$) są dodatnie oraz $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Jaka minimalną wartość może przyjąć iloczyn

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) ?$$

Rozwiązanie.

Wprowadźmy oznaczenia

$$A_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n \text{ oraz } P_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_n,$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną wynika, że $A_i \geq (n-1) \sqrt[n-1]{P_i}$, a więc

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) &= \frac{A_1}{a_1} \cdot \frac{A_2}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_n}{a_n} \\ &\geq \frac{(n-1) \sqrt[n-1]{P_1}}{a_1} \cdot \frac{(n-1) \sqrt[n-1]{P_2}}{a_2} \cdot \frac{(n-1) \sqrt[n-1]{P_n}}{a_n} \\ &= (n-1)^n \frac{\sqrt[n-1]{P_1 P_2 \dots P_n}}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)^n. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1/n$, to rozważany iloczyn przyjmuje wartość $(n-1)^n$. □

* * *

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, y, z spełniające równanie:

$$2x^4 + y^4 = 7z^4.$$

Rozwiązanie.

Liczby $x = y = z = 0$ stanowią oczywiście rozwiązanie równania. Udowodnimy, że jest to jedyne rozwiązanie w liczbach całkowitych. Przypuśćmy, że przynajmniej jedna z liczb x, y, z jest różna od zera. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb x, y, z , tzn. $x = dx'$, $y = dy'$, $z = dz'$. Po podstawieniu do równania otrzymamy $d^4(2x'^4 + y'^4) = 7d^4z'^4$, a więc $2x'^4 + y'^4 = 7z'^4$. Możemy więc zakładać, że $NWD(x, y, z) = 1$. Zbadamy podzielność lewej strony równania przez 7. Poniższa tabelka zawiera reszty z dzielenia przez 7 liczb x^2 , x^4 oraz $2x^4$ w zależności od reszty jaką daje liczba x .

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^4	0	1	2	4	4	2	1
$2x^4$	0	2	4	1	1	4	2

Widać z niej, że lewa strona równania jest podzielna przez 7 tylko wtedy gdy obie liczby x i y są podzielne przez 7. Wtedy jednak lewa strona jest podzielna przez 7^4 , a więc i liczba z musi być podzielna przez 7. Przeczy to założeniu, że $NWD(x, y, z) = 1$. $\square$

* * *

Zadanie 11. W pola kwadratowej tablicy $n \times n$ wpisano symetrycznie względem głównej przekątnej (tzn. przekątnej łączącej lewy górny róg tablicy z jej prawym dolnym rogiem) liczby $1, 2, 3, \dots, n$ tak, że w każdej kolumnie i każdym wierszu tablicy znajdują się różne liczby. Wykazać, że liczby na głównej przekątnej tablicy też są różne.

Rozwiązanie.

W sformułowaniu zadania zabrakło założenia, że n jest liczbą nieparzystą. Dla n parzystej można z łatwością podać przykład przeczący tezie zadania.

Rozważmy zatem przypadek, gdy n jest liczbą nieparzystą. Przypuśćmy, że pewna liczba j nie występuje na głównej przekątnej. Ze względu na symetrię, występuje ona na tablicy parzystą liczbę razy. Jest to jednak niemożliwe, bo zgodnie z założeniami (patrzac na wiersze), liczba j występuje w każdym wierszu dokładnie jeden raz, a więc dokładnie n -razy w całej tablicy. Na głównej przekątnej musi więc występować każda z liczb $1, 2, \dots, n$. $\square$

* * *

Zadanie 12. Dany jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Na podstawie AB obieramy punkt K , zaś na podstawie CD punkt L . Niech C będzie częścią wspólną trójkątów ALB i CKD . Przy jakim położeniu punktów K i L figura C ma największe pole?

Rozwiązanie.

Niech M oznacza punkt przecięcia AL z KD , zaś N punkt przecięcia CK z BL . Wprowadźmy oznaczenia: $AB = a$, $CD = b$, $AK = x$, $LD = y$. Wówczas $LC = b - y$ oraz $BK = a - x$. Ponieważ trójkąty LKM i LKD mają wspólną podstawę LK , więc

$$\frac{S_{LKD}}{S_{LKM}} = \frac{KD}{KM} = \frac{KM + MD}{KM} = 1 + \frac{MD}{KM} = 1 + \frac{DL}{AK} = \frac{x + y}{x}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{S_{LKC}}{S_{LKN}} = \frac{a - x}{(a - x) + (b - y)}.$$

Przyjmując, że h jest wysokością trapezu (odległością między podstawami AB i CD) otrzymujemy:

$$S_{LKM} = \frac{hy}{2} \cdot \frac{x}{x + y} \text{ oraz } S_{LKN} = \frac{h(b - y)}{2} \cdot \frac{a - x}{(a - x) + (b - y)}.$$

Stąd

$$S_{NKML} = \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{x} + \frac{a-x}{(a-x)+(b-y)} \right)$$

Bezpośrednio można sprawdzić, że

$$S_{NKML} = \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{ab}{a+b} - \frac{(ay-bx)^2}{(a+b)(x+y)(a+b-x-y)} \right) \leq \frac{abh}{2(a+b)},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

Ostatecznie figura $\mathcal{C}$ ma największe pole, jeśli K i L spełniają zależność:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{DL}{DC}.$$

□

* * *

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_i \in \{-1, 1\}$ dla $i = 0, 1, \dots, n$, mające n pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie.

Przypuśćmy, że wielomian $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ma n pierwiastków rzeczywistych $x_1, \dots, x_n$. Wtedy

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że $a_n = 1$. Po wymnożeniu prawej strony i porównaniu współczynników otrzymamy

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \pm 1$$

oraz

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \pm 1$$

Stąd obliczamy

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= \\ (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) &= 1 \pm 2. \end{aligned}$$

Ponieważ suma kwadratów jest nieujemna, więc z powyższego wynika, że

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 3.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną (uwzględniając fakt, że $x_1 x_2 \dots x_n = \pm 1$) wynika, że

$$\frac{3}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} = 1.$$

Tak więc $n \leq 3$. Dla $n = 3$ z powyższych nierówności wynika, że $x_i^2 = 1$ dla $i = 1, 2, 3$, a więc $x_i = \pm 1$. Należy rozważyć tylko wielomiany: $\pm(x-1)^3, \pm(x+1)^3, \pm(x-1)(x+1)^2, \pm(x+1)(x-1)^2$. Dwa ostatnie wielomiany spełniają warunki zadania. Z łatwością sprawdzamy, że wśród ośmiu wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach równych ± 1 pierwiastki rzeczywiste mają następujące: $\pm(x^2 - x - 1), \pm(x^2 + x - 1)$. Dla $n = 1$ mamy oczywiście cztery kolejne wielomiany spełniające

warunki zadania: $\pm(x+1)$ i $\pm(x-1)$. Ostatecznie warunki zadania spełnia 12 wielomianów. $\square$

* * *

Zadanie 14. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wiadomo, że pewna potęga liczby p ma 20 cyfr. Wykazać, że wśród tych cyfr przynajmniej trzy są jednakowe.

Rozwiązanie.

Przypuśćmy, że żadna z dwudziestu cyfr rozważanej potęgi p^m liczby pierwszej $p > 3$ nie powtarza się trzy razy. Oznacza to, że każda z cyfr występuje dwukrotnie. W szczególności suma cyfr liczby p^m wynosi $2(1 + 2 + \dots + 9) = 90$, a więc jest podzielna przez 9. Stąd wynika, że liczba p^m jest podzielna przez 9, co jest oczywiście niemożliwe. $\square$

* * *

Zadanie 15. W przestrzeni wybrano $2n$ punktów tak, że żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Następnie połączono pewne punkty tworząc $n^2 + 1$ odcinków. Wykazać, że pewne trzy odcinki tworzą trójkąt.

Rozwiązanie.

Rozważmy punkt A z którego wychodzi najwięcej odcinków. Powiedzmy, że z A wychodzi k odcinków. Punkty połączone z A oznaczmy kolejno przez $B_1, B_2, \dots, B_k$. Pozostałe punkty (jest ich $2n - k - 1$) przez $C_1, C_2, \dots, C_{2n-k-1}$. Jeśli pewna dwa punkty B_i i B_j są połączone, to mamy oczywiście trójkąt AB_iB_j . Załóżmy, że nie ma połączeń między punktami $B_1, B_2, \dots, B_k$. Oszacujemy teraz z góry liczbę połączeń. Każdy z punktów B_i jest połączony wtedy z punktem A oraz z co najwyżej $2n - k - 1$ punktami spośród punktów $C_1, C_2, \dots, C_{2n-k-1}$. Każdy z punktów C_j jest połączony z nie więcej niż k innymi punktami. Dodając do tego k odcinków wychodzących z A otrzymujemy, że liczba poprowadzonych odcinków nie przekracza;

$$\frac{1}{2} (k(2n - k) + (2n - k - 1)k + k) = k(2n - k) \leq \left(\frac{k + (2n - k)}{2} \right)^2 = n^2,$$

wbrew założeniu, że poprowadzono $n^2 + 1$ odcinków. Między punktami $B_1, B_2, \dots, B_k$ musi istnieć zatem połączenie. $\square$

* * *