



ROZWIĄZANIA ZADAŃ PRZYGOTOWAWCZYCH - 2005

KLASY DRUGIE

Zadanie 1. Czy liczba $m = 1 \underbrace{00 \dots 00}_n 5 \underbrace{00 \dots 00}_n 1$ może być:

- kwadratem liczby naturalnej,
- sześcianem liczby naturalnej?

Rozwiązanie.

a) Zauważmy, że

$$1 \underbrace{00 \dots 00}_n 4 \underbrace{00 \dots 00}_n 4 < 1 \underbrace{00 \dots 00}_n 5 \underbrace{00 \dots 00}_n 1 < 1 \underbrace{00 \dots 00}_n 6 \underbrace{00 \dots 00}_n 9.$$

Z drugiej strony $1 \underbrace{00 \dots 00}_n 4 \underbrace{00 \dots 00}_n 4 = 4 + 4 \cdot 10^{n+1} + 10^{2n+2} = (2 + 10^{n+1})^2$, $m = 1 + 5 \cdot 10^{n+1} + 10^{2n+2}$ oraz $1 \underbrace{00 \dots 00}_n 6 \underbrace{00 \dots 00}_n 9 = 9 + 6 \cdot 10^{n+1} + 10^{2n+2} = (3 + 10^{n+1})^2$.

Tak więc

$$(2 + 10^{n+1})^2 < m < (3 + 10^{n+1})^2.$$

Stąd wynika, że m nie jest kwadratem liczby naturalnej (jako liczba między kwadratami dwóch kolejnych liczb naturalnych).

b) Z równości $(3k+r)^3 = 27k^3 + 27k^2r + 9kr^2 + r^3$ wynika, że sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 9 może dawać resztę 0, 1 lub 8. Jednak $m = 1 + 5 \cdot 10^{n+1} + 10^{2n+2} = 1 + 5 \cdot (9+1)^{n+1} + (9+1)^{2n+2} = 9s + 7$, dla pewnej liczby naturalnej s . Tak więc m nie jest sześcianem liczby naturalnej. $\square$

* * *

Zadanie 2. Ile cyfr ma najmniejsza liczba naturalna podzielna przez 275, której suma cyfr jest równa 275?

Rozwiązanie

Zauważmy, że $275 = 25 \cdot 11$. Wykorzystamy następującą cechę podzielności przez 11:

Liczba $N = c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0$ jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\tilde{S}(N) = c_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^n c_n$ jest podzielna przez 11.

Dowód powyższej cechy wynika stąd, że $N = c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + \dots + c_n \cdot 10^n = c_0 + c_1 \cdot (11-1) + c_2 \cdot (11-1)^2 + \dots + c_n \cdot (11-1)^n = 11k + c_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^n c_n$, dla pewnej liczby całkowitej k .

Oznaczmy przez $S(N)$ sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby N . Zauważmy, że $S(N) + \tilde{S}(N) = 2(c_0 + c_2 + c_4 + \dots)$ jest zawsze liczbą parzystą. Jeżeli N jest taką liczbą, że $S(N) = 275$, to $\tilde{S}(N)$ jest liczbą nieparzystą. Jeżeli dodatkowo N jest podzielna przez 11, to na podstawie powyższej cechy, $\tilde{S}(N) \geq 11$ lub $\tilde{S}(N) \leq -11$. Udowodnimy, że liczba spełniająca warunki zadania nie może mieć mniej niż 33 cyfry. Ponieważ jest ona podzielna przez 25, więc ma ona jedną z czterech postaci:

$$N = c_n c_{n-1} \dots c_2 00 \text{ lub } N = c_n c_{n-1} \dots c_2 25 \text{ lub}$$

$$N = c_n c_{n-1} \dots c_2 50 \text{ lub } N = c_n c_{n-1} \dots c_2 75,$$

gdzie $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Załóżmy, że $n \leq 31$. Jeżeli $\tilde{S}(N) \geq 11$, to z powyższego wynika, że

$$c_0 + c_2 + \dots + c_4 + \dots + c_{30} \geq \frac{275 + 11}{2} = 143$$

Jednak $c_0 \in \{0, 5\}$, więc $c_2 + \dots + c_4 + \dots + c_{30} \geq 138$. Jest to niemożliwe, gdyż $15 \cdot 9 = 135$. W przypadku, gdy $\tilde{S}(N) \leq 11$ rozważamy różnicę $S(N) - \tilde{S}(N) = 2(c_1 + c_3 + c_5 + \dots)$. Podobnie jak wyżej, uwzględniając fakt, że $c_1 \in \{0, 2, 5, 7\}$ otrzymujemy

$$c_3 + c_5 + \dots + c_{31} \geq 143 - 7 = 136 > 15 \cdot 9,$$

co jest niemożliwe. Nie istnieje zatem mniej niż 33 cyfrowa liczba podzielna przez 275 o sumie cyfr równej 275. Z powyższej cechy podzielności przez 11 wynika, że liczba

$$N = 81 \underbrace{99 \dots 99}_{28 \text{ dziewiątek}} 950$$

jest podzielna przez 11 (bo $\tilde{S}(N) = -5 + 9 - 1 + 8 = 11$) oraz oczywiście przez 25. Ponadto $S(N) = 5 + 9 + 28 \cdot 9 + 1 + 8 = 275$. Ostatecznie, najmniejsza liczba podzielna przez 275 o sumie cyfr 275 ma 33 cyfry. $\square$

* * *

Zadanie 3. a) Wykazać, że liczba $a = 0,12345 \dots 101112 \dots$, powstała przez wypisanie po przecinku wszystkich kolejnych liczb naturalnych, jest niewymierna.

b) Wykazać, że liczba $b = 0,2481632 \dots 10242048 \dots$, powstała przez wypisanie po przecinku wszystkich kolejnych potęg dwójki, jest niewymierna.

Rozwiązanie

Skorzystamy z następującego twierdzenia:

Liczba $0, c_1 c_2 c_3 \dots$, gdzie $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$, jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{c_n\}$ jest okresowy od pewnego miejsca, tzn. istnieją liczby naturalne n_0 oraz T takie, że $c_{m+T} = c_m$ dla $m \geq n_0$.

a) W ciągu kolejnych cyfr liczby a występują np. dowolnie długie ciągi kolejnych zer, kolejnych jedynek, itp. Ciąg cyfr liczby a nie jest zatem od żadnego miejsca okresowy. Liczba a jest wobec tego niewymierna.

b) Niech $\{b_n\}$ będzie ciągiem kolejnych cyfr po przecinku liczby b , tzn. $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8, b_4 = 1, b_5 = 6, \dots$. Dowód oprzemy na dwóch łatwych do zauważenia faktach:

(1) Dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje potęga dwójki mająca w zapisie dziesiętnym dokładnie k cyfr;

(2) Jeśli $\ell(m)$ oznacza pierwszą (licząc od lewej strony) cyfrę zapisu dziesiętnego liczby naturalnej m , to $\ell(m) \neq \ell(2m)$.

Przypuśćmy, że ciąg $\{b_n\}$ jest okresowy od pewnego miejsca. Niech $b_{m+T} = b_m$ dla $m \geq n_0$. Na podstawie (1) wśród potęg dwójki wypisywanych na prawo od pozycji n_0 możemy wybrać taką, której liczba cyfr w zapisie dziesiętnym jest całkowitą wielokrotnością liczby T . Załóżmy, że zaczynając od k -tej pozycji ($k \geq n_0$) wypisywana jest sT cyfrowa potęga 2^r . Wtedy zgodnie z przyjętymi oznaczeniami: $b_k = \ell(2^r)$ oraz $b_{k+sT} = \ell(2^{r+1})$. Ponieważ T jest okresem ciągu $\{b_n\}$ otrzymujemy $b_k = b_{k+sT}$, czyli $\ell(2^r) = \ell(2^{r+1})$. Przeczy to jednak (2).

□

* * *

Zadanie 4. Dla danej liczby naturalnej n wyznaczyć maksymalną potęgę dwójki dzielącą liczbę $7^n - 1$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie oprzemy na znanej tożsamości:

$$a^m - 1 = (a - 1)(a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a + 1).$$

Przypuśćmy, że $n = 2^k s$, gdzie $k \geq 0$ oraz s jest liczbą nieparzystą. Z powyższej tożsamości wynika, że

$$7^n - 1 = (7^{2^k})^s - 1 = (7^{2^k} - 1)(7^{2^k(s-1)} + 7^{2^k(s-2)} + \dots + 7^{2^k} + 1).$$

Drugi czynnik powyższego rozkładu jest liczbą nieparzystą (jako suma nieparzystej liczby nieparzystych składników), więc wystarczy znaleźć najwyższą potęgę dwójki dzielącą liczbę $7^{2^k} - 1$. Niech zatem α_k będzie takie, że

$$7^{2^k} - 1 = 2^{\alpha_k} m,$$

gdzie m jest liczbą nieparzystą. Korzystając ze wzoru dwumiennego Newtona otrzymujemy dla $k \geq 1$

$$7^{2^k} + 1 = (8 - 1)^{2^k} + 1 = 8^{2^k} - \binom{2^k}{1} 8^{2^k-1} + \dots - \binom{2^k}{2^k-1} 8 + 1 + 1 = 2l,$$

gdzie l jest liczbą nieparzystą. Mamy więc

$$7^{2^{k+1}} - 1 = (7^{2^k} - 1)(7^{2^k} + 1) = 2^{\alpha_k+1} ml,$$

czyli $\alpha_{k+1} = \alpha_k + 1$. Ponieważ $\alpha_1 = 3$, więc z łatwością otrzymujemy, że $\alpha_k = k + 2$, dla $k \geq 1$.

Ostatecznie $\alpha_0 = 1$ oraz $\alpha_k = k + 2$, dla $k \geq 1$.

□

* * *

Zadanie 5. Zbiór M składa się z 2005 różnych liczb naturalnych. Wykazać, że można wybrać trzy różne liczby $a, b, c \in M$ takie, że $a(b - c)$ dzieli się przez 2005.

Rozwiązanie

Możliwe są dwa przypadki:

- (1) Liczby ze zbioru M dają różne reszty z dzielenia przez 2005;
- (2) Istnieją dwie liczby (oznaczymy je przez b i c) dające taką samą resztę z dzielenia przez 2005.

W przypadku (1) istnieje w zbiorze M liczba a podzielna przez 2005. Wtedy dla dowolnych $b, c \in M$ mamy podzielność $a(b - c)$ przez 2005. Jeśli zaś zachodzi sytuacja (2), to $b - c$ dzieli się przez 2005, a więc dla dowolnej liczby $a \in M$ mamy $2005 \mid a(b - c)$.

□

* * *

Zadanie 6. Prostokąty $P_1, P_2, \dots, P_n$ pokrywają całkowicie figurę $\mathcal{F}$ o polu 1. Wykazać, że przynajmniej jeden z tych prostokątów ma obwód nie mniejszy od $4/\sqrt{n}$.

Rozwiązanie

Oszacujemy najpierw pole dowolnego prostokąta względem jego obwodu. Niech a, b są długościami boków prostokąta o obwodzie p . Stosując nierówność między średnimi arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = p^2/16,$$

Wynika stąd, że każdy prostokąt o obwodzie mniejszym od $4/\sqrt{n}$ ma pole mniejsze od $1/n$. Ponieważ prostokąty $P_1, P_2, \dots, P_n$ pokrywają całkowicie figurę $\mathcal{F}$ o polu 1, więc wśród nich musi istnieć przynajmniej jeden o obwodzie nie mniejszym od $4/\sqrt{n}$. $\square$

* * *

Zadanie 7. Rozwiązać równania:

a) $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$; b) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 0$

Rozwiązanie

a) Podstawiając $y = x - 3$ równanie przyjmuje postać $(y-1)^6 + (y+1)^6 = 64$. Po przekształceniach otrzymujemy równanie $y^6 + 15y^4 + 15y^2 - 31 = 0$. Rozkładając lewą stronę na czynniki otrzymujemy postać równoważną:

$$(y-1)(y+1)(y^4 + 16y^2 + 31) = 0.$$

Sdąd z łatwością wnioskujemy, że $y = -1$ lub $y = 1$, czyli $x = 2$ lub $x = 4$.

b) Zauważmy, że $x \geq 0$. Zapiszmy równanie w postaci:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu, po uproszczeniach otrzymamy $2 + \sqrt{x^2 + 9x} = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$. Podnosząc raz jeszcze ostatnie równanie obustronnie do kwadratu otrzymamy $x + \sqrt{x^2 + 9x} = 0$. Ponieważ $x \geq 0$, więc z ostatniej zależności wynika, że $x = 0$ jest jedynym rozwiązaniem naszego równania. $\square$

* * *

Zadanie 8. a) Wielomian $W(x)$ stopnia $2n+1$ ma współczynniki całkowite. Wykazać, że jeśli istnieją różne liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ takie, że

$$|W(x_1)| = |W(x_2)| = \dots = |W(x_{2n+1})| = 1,$$

to $W(x)$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

b) Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia 7 o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeśli istnieje pięć różnych liczb całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_5$ takich, że

$$|W(x_1)| = |W(x_2)| = \dots = |W(x_5)| = 1,$$

to $W(x)$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Skorzystamy z następującej własności wielomianów:

(*) Jeżeli $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia n oraz $x_1, x_2, \dots, x_k$ różnymi liczbami takimi, że $W(x_1) = W(x_2) = \dots = W(x_k) = a$, to $k \leq n$.

Własność, ta wynika z faktu, że $x_1, x_2, \dots, x_k$ są różnymi pierwiastkami wielomianu $W(x) - a$, a więc $W(x) - a$ jest podzielny przez $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$.

a) Przypuśćmy, że $W(x) = P(x)Q(x)$ dla pewnych wielomianów $P(x), Q(x)$ o współczynnikach całkowitych i mających dodatnie stopnie. Suma stopni tych wielomianów wynosi $2n + 1$, więc jeden z nich ma stopień nie większy niż n . Niech np. stopień $P(x) \leq n$. Ponieważ dla $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$, $|P(x_i)| \cdot |Q(x_i)| = 1$ oraz $P(x_i), Q(x_i)$ są liczbami całkowitymi, więc $|P(x_i)| = 1$. Oznacza to, że liczby $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ są pierwiastkami wielomianu $P(x)^2 - 1$ stopnia $\leq 2n$, co jest niemożliwe.

b) Załóżmy, że $W(x) = P(x)Q(x)$ dla pewnych wielomianów $P(x), Q(x)$ o współczynnikach całkowitych i mających dodatnie stopnie. Podobnie jak w a) możemy założyć, że $P(x)$ ma stopień ≤ 3 . Wtedy dla $i = 1, 2, \dots, 5$, $P(x_i) = -1$ lub $P(x_i) = 1$. Z własności (*) wynika, że dla dokładnie trzech różnych wartości i $P(x_i)$ jest równe jednocześnie -1 lub 1 . Bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = -1$, $x_1 < x_2 < x_3$ oraz $P(x_4) = P(x_5) = 1$. Wówczas $P(x) + 1 = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, gdzie a jest liczbą całkowitą. Podstawiając $x = x_4$ oraz $x = x_5$ i uwzględniając to, że $P(x_4) = P(x_5) = 1$ otrzymamy równości

$$a(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = 2 \text{ oraz } a(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_4 - x_3) = 2.$$

Zauważmy, że zgodnie z przyjętymi założeniami $x_4 - x_1 > x_4 - x_2 > x_4 - x_3$ oraz $x_5 - x_1 > x_5 - x_2 > x_5 - x_3$. Z drugiej strony jedynym rozkładem liczby w postaci iloczynu trzech różnych czynników jest $(-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 2$, a więc $a = 1$ lub $a = -1$ oraz $x_4 - x_1 = x_5 - x_1$. Stąd $x_4 = x_5$, co przeczy założeniom zadania. □

* * *

Zadanie 9. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 2$ rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1^2 - 1 \\ x_3 = 2x_2^2 - 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = 2x_{n-1}^2 - 1 \\ x_1 = 2x_n^2 - 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeśli $|x| > 1$, to $2x^2 - 1 > x$. (dokładniej, zbiorem rozwiązań nierówności $2x^2 - 1 > x$ jest $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$). Tak więc, jeśli $|x_1| > 1$, to $x_2 = 2x_1^2 - 1 > 1$ oraz $x_2 > x_1$. Z tych samych powodów $x_3 > x_2, \dots, x_n > x_{n-1}$ oraz $x_1 > x_n$, a więc sprzeczność. Zatem rozważany układ nie ma rozwiązań takich, że $|x_1| > 1$.

Niech wobec tego $|x_1| \leq 1$. Istnieje wtedy liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że $x_1 = \cos t$. Z tożsamości $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ wynika kolejno, że $x_2 = \cos 2t, x_3 = \cos 2^2 t, \dots, x_n = \cos 2^{n-1} t$ i w końcu $x_1 = \cos 2^n t$. Musi więc zachodzić równość:

$$\cos t = \cos 2^n t.$$

Korzystając z tożsamości $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ otrzymujemy

$$\sin \frac{(2^n + 1)t}{2} \sin \frac{(2^n - 1)t}{2} = 0.$$

Stąd wnosimy, że $t = \frac{2k\pi}{2^n+1}$ lub $t = \frac{2k\pi}{2^n-1}$ dla pewnej liczby całkowitej k . Ostatecznie, rozważany układ spełniają ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ takie, że $x_i = \cos \frac{2^i k \pi}{2^n+1}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ lub $x_i = \cos \frac{2^i k \pi}{2^n-1}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Należy jeszcze rozstrzygnąć dla jakich wartości k otrzymujemy różne rozwiązania układu. Podobnie jak wyżej stwierdzamy, że równość:

$$\cos \frac{2k\pi}{2^n+1} = \cos \frac{2l\pi}{2^n+1}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{(k+l)\pi}{2^n+1} = s\pi \quad \text{lub} \quad \frac{(k-l)\pi}{2^n+1} = s\pi$$

dla pewnej liczby całkowitej s . Ostatni warunek jest równoważny temu, że jedna z liczb $k+l$ lub $k-l$ jest całkowitą wielokrotnością liczby 2^n+1 . Teraz z łatwością zauważamy, że dla $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$ odpowiadające wartości x_1 są parami różne. Analogicznie otrzymujemy, że wszystkie różne wartości w ciągu $\{\cos \frac{2l\pi}{2^n-1}\}$ użyjemy przyjmując $l = 0, 1, \dots, 2^{n-1}-1$. Zauważmy ponadto, że dla $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ oraz $1 \leq l \leq 2^{n-1}-1$ nie może zajść równość:

$$\cos \frac{2k\pi}{2^n+1} = \cos \frac{2l\pi}{2^n-1}.$$

W przeciwnym razie mielibyśmy

$$\frac{k\pi}{2^n+1} + \frac{l\pi}{2^n-1} = s\pi \quad \text{lub} \quad \frac{k\pi}{2^n+1} - \frac{l\pi}{2^n-1} = s\pi$$

dla pewnej liczby całkowitej s , czyli

$$k(2^n-1) \pm l(2^n+1) = s(2^n-1)(2^n+1).$$

Żadna z ostatnich równości nie może jednak zajść, gdyż liczby 2^n-1 i 2^n+1 są względnie pierwsze [nie mamy podzielności $2^n+1 \mid k(2^n-1)$]. Ostatecznie układ ma 2^n różnych rozwiązań:

$$x_i = \cos \frac{2^i k \pi}{2^n+1} \quad \text{lub} \quad x_i = \cos \frac{2^i l \pi}{2^n-1},$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$, $l = 1, 2, \dots, 2^{n-1}-1$.

□

* * *

Zadanie 10. Rozwiązać równanie

$$x^2 - x + [x]^2 - [x] = 1 + x[x],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Rozwiązanie

Niech α oznacza część ułamkową liczby x , tzn. $x = [x] + \alpha$ oraz $0 \leq \alpha < 1$. Po podstawieniu do równania otrzymamy:

$$[x]^2 + (\alpha^2 - \alpha - 1) = (2 - \alpha)[x].$$

Ponieważ $\alpha^2 - \alpha - 1 = (\alpha - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ jest jasne, że dla $\alpha \in [0, 1)$ mamy

$$-\frac{5}{4} \leq \alpha^2 - \alpha - 1 \leq -1.$$

Zauważmy teraz, że jeśli $[x] \geq 3$, to $[x]^2 + (\alpha^2 - \alpha - 1) > [x]^2 - 2 \geq 3[x] - 2 > (2 - \alpha)[x]$. Zatem równanie nie ma rozwiązań w przedziale $[3, +\infty)$. Jeśli zaś $[x] \leq -2$, to

$(2 - \alpha)[x] < 0$ oraz $[x]^2 + (\alpha^2 - \alpha - 1) > 0$. Możemy więc dalej zakładać, że $[x] \in \{-1, 0, 1, 2\}$. W każdym z tych czterech przypadków nasze równanie sprowadza się do równania kwadratowego względem α . Przez bezpośrednie sprawdzenie stwierdzamy, że tylko dla $[x] = 2$ stosowne równanie kwadratowe ma pierwiastek w przedziale $[0, 1)$. Jest nim $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Tak więc nasze równanie ma jedno rozwiązanie:

$$x = 2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

□

* * *

Zadanie 11. Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są nieujemne oraz $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Jaką największą wartość może przyjąć suma $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$?

Rozwiązanie

Niech $a = x_1 + x_3 + \dots$, $b = x_2 + x_4 + \dots$ oznaczają sumy wystkich x_i numerowanych odpowiednio liczbami nieparzystymi i parzystymi. Mamy $a + b = 1$ oraz ponieważ liczby x_i są nieujemne

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

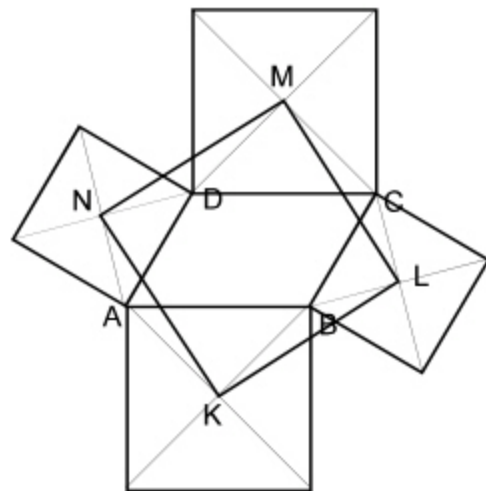
Zauważmy, że dla ciągu $x_1 = x_2 = 1/2$, $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$ rozważana suma przyjmuje wartość $1/4$. Tak więc $1/4$ jest największą wartością tej sumy. □

* * *

Zadanie 12. Na bokach równoległoboku zbudowano kwadraty, tak że każdy kwadrat ma jeden bok wspólny z równoległobokiem oraz nie ma innych punktów wspólnych. Udowodnić, że środki tak otrzymanych kwadratów tworzą kwadrat.

Rozwiązanie

Niech $ABCD$ będzie rozważanym równoległobokiem. Oznaczmy przez K, L, M, N środki dobudowanych kwadratów (patrz rysunek obok). Zauważmy, że $\angle KBL = 360^\circ - (\angle ABC + \angle KBA + \angle LBC) = 270^\circ - \angle ABC = 90^\circ + 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ + \angle BAD = \angle KAN$. Stąd wnosimy, że trójkąty KAN i KBL są przystające. Ponieważ $\angle AKB = 90^\circ$, trójkąt NAK jest obrazem trójkąta KBL przy obrocie o środku K o kąt 90° (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Stąd w szczególności wynika, że $|KN| = |KL|$ i $\angle NKL = 90^\circ$. Analogicznie pokazujemy prostopadłość i równość długości pozostałych par boków czworokąta $KLMN$. Ostatecznie $KLMN$ jest kwadratem.



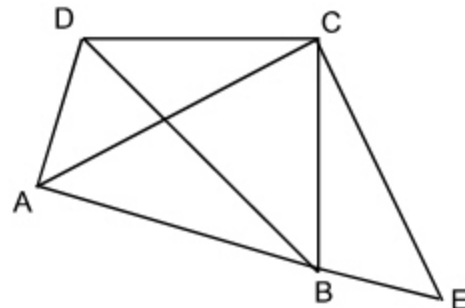
□

* * *

Zadanie 13. Dany jest czworokąt, którego dwa przeciwległe kąty są proste; długości boków przy jednym z kątów prostych wynoszą a i b , długości boków przy drugim kącie prostym są równe. Obliczyć odległość między wierzchołkami przy kątach prostych.

Rozwiązanie

Niech $ABCD$ będzie rozważanym czworokątem, przy czym $|AB| = a$, $|AD| = b$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ oraz $|BC| = |CD|$. Przedłużmy bok AB do punktu E takiego, że $|BE| = |AD| = b$. Ponieważ $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$, więc $\angle EBC = \angle ADC$. Z równości $|CB| = |CD|$ wynika teraz przystawanie trójkątów EBC i ACD . Stąd otrzymujemy $\angle ACE = 90^\circ$ oraz $|AC| = |CE|$. Trójkąt ACE jest zatem równoramiennym trójkątem prostokątnym, przy czym $|AE| = a + b$. Ostatecznie $|AC| = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.



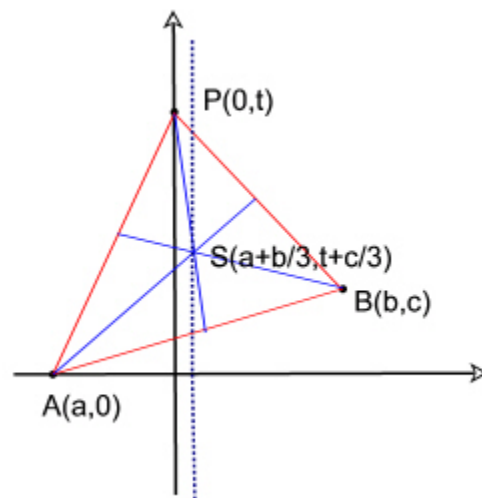
□

* * *

Zadanie 14. Na płaszczyźnie dana jest prosta ℓ oraz dwa punkty A, B nie należące do ℓ . Wyznaczyć zbiór środków ciężkości wszystkich trójkątów ABP takich, że P należy do prostej ℓ .

Rozwiązanie

Wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych tak, że oś OY pokrywa się prostą ℓ , punkt A leży na osi OX i ma współrzędne $(a, 0)$, punkt B ma współrzędne (b, c) . Rozważmy dowolny punkt P leżący na prostej ℓ . Oczywiście P ma współrzędne $(0, t)$, przy czym t może być dowolną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że współrzędne środka ciężkości S trójkąta ABP są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych wierzchołków, a więc S ma współrzędne $(\frac{a+b}{3}, \frac{c+t}{3})$. Stąd widać, że środki ciężkości trójkątów ABP są współliniowe i wyznaczają pewną prostą ℓ' równoległą do prostej ℓ .

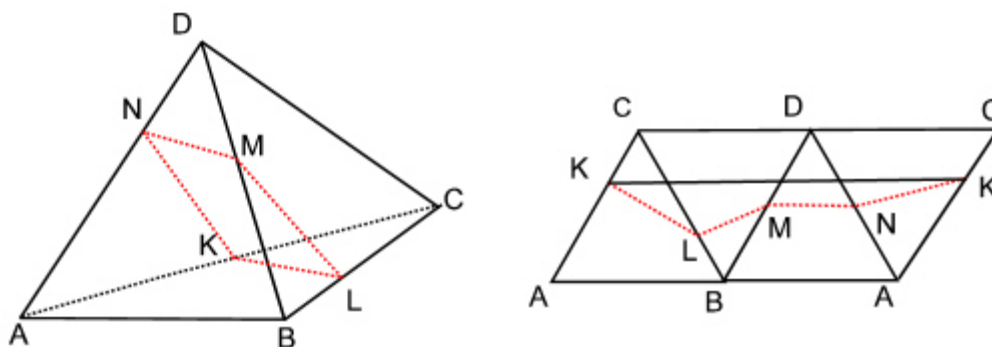


□

* * *

Zadanie 15. Czworoscian foremny o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną, otrzymując czworokąt o minimalnym obwodzie. Wyznaczyć ten obwód.

Rozwiązanie



Niech $KLMN$ będzie czworokątem powstałym w wyniku przecięcia płaszczyzną czworościanu foremnego o krawędzi długości a . Oznaczmy wierzchołki czworościanu tak, że K, L, M, N leżą odpowiednio na krawędziach AC, BC, BD, AD . Narysujmy siatkę czworościanu w postaci równoległoboku o bokach długości a i $2a$ (por. powyższy rysunek). Wierzchołki czworokąta wyznaczają łamaną $KLMNK$, o długości $\geq 2a$. Oczywiście minimalną długością tej łamanej jest $2a$. Z drugiej strony środki krawędzi AC, BC, BD, AD leżą oczywiście na jednej płaszczyźnie i wyznaczają czworokąt o obwodzie $2a$. $\square$

* * *

[opr. pg]