XI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

ETAP KORESPONDENCYJNY, JUNIORZY

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1

Czy istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c takie, że $a^2 + b^3 = c^5$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Takie liczby istnieją. Przykładowo, liczby $a = 2^{12}$, $b = 2^8$, $c = 2^5$ spełniają to równanie, bo zachodzi $2^{24} + 2^{24} = 2^{25}$.

Zadanie 2

Proste ℓ_1 i ℓ_2 przecinają się w punkcie X. Punkt nazwiemy *równoodległym* jeśli jego odległości od prostych ℓ_1 i ℓ_2 są równe. Punkty A i B są równoodległe i takie, że $A \neq X$, $B \neq X$, $A \neq B$. Wyznacz wszystkie możliwe miary kąta AXB.

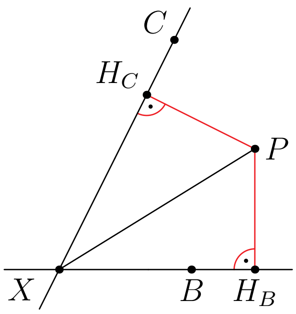
Szkic rozwiązania

Rozpocznijmy rozwiązanie od następującej uwagi: jeśli punkt P leży we wnętrzu kąta BXC, patrz rysunek, to odległości punktu P od prostych XB i XC są równe wtedy i tylko wtedy, gdy XP jest dwusieczną kąta BXC.

Zaiste: jeśli $|PH_B| = |PH_C|$ to z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$|XH_C|^2 = |XP|^2 - |PH_C|^2 = |XP|^2 - |PH_B|^2 = |XH_B|^2.$$

Trójkąty PH_BX i PH_CX są przystające na mocy cechy bok-bok-bok, więc $\sphericalangle H_BXP = \sphericalangle H_CXP$.



Z uwagi wynika, że punkty A i B leżą na dwusiecznych kątów pomiędzy prostymi ℓ_1 i ℓ_2. Możliwe są trzy przypadki:

1. Punkty A i B leżą na dwusiecznych kątów przyległych. Wtedy $\sphericalangle AXB = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.
2. Punkty A i B leżą na dwusiecznych kątów przeciwległych. Wtedy $\sphericalangle AXB = 180°$.
3. Punkty A i B leżą na dwusiecznej tego samego kąta. Wtedy $\sphericalangle AXB = 0°$.

Zadanie 3

Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie.

Niech $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$. Wtedy $\sqrt[3]{2} = a - \sqrt{2}$, a więc

$$2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = (a - \sqrt{2})^3 = a^3 - 3\sqrt{2}a^2 + 6a - 2\sqrt{2} = (a^3 + 6a) - (3a^2 + 2)\sqrt{2}.$$

Liczba $3a^2 + 2$ jest dodatnia, więc z równania powyżej otrzymujemy, że

$$\sqrt{2} = -\frac{2 - (a^3 + 6a)}{3a^2 + 2}.$$

Jeśli a jest liczbą wymierną, to widzimy, że i $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, co nie jest prawdą. Zatem a jest liczbą niewymierną, co należało wykazać.

Zadanie 4

Dany jest trójkąt ABC. Wyznacz taki punkt D leżący na boku AB, że suma odległości punktów A i B od prostej CD jest największa.

Rozwiązanie.

Symbolem P_{XYZ} będziemy oznaczać pole trójkąta XYZ. Skoro punkt D leży na *odcinku* AB, to zachodzi

$$P_{ACD} + P_{BCD} = P_{ABC},$$

Pola po lewej stronie równania możemy odliczyć znając odległość h_A punktu A od prostej CD i odległość h_B punktu B od tej prostej. Mianowicie, $P_{ACD} = \frac{1}{2}h_A \cdot |CD|$ oraz $P_{BCD} = \frac{1}{2}h_B \cdot |CD|$. Łącznie otrzymujemy, że

$$\frac{1}{2}(h_A + h_B) \cdot |CD| = P_{ACD} + P_{BCD} = P_{ABC},$$

czyli

$$h_A + h_B = \frac{2P_{ABC}}{|CD|}.$$

Tym samym, suma odległości A i B prostej CD jest największa dokładnie wtedy gdy długość odcinka CD jest najmniejsza. Niech H będzie spodkiem wysokości CH w trójkącie ABC. Rozważmy trzy przypadki:

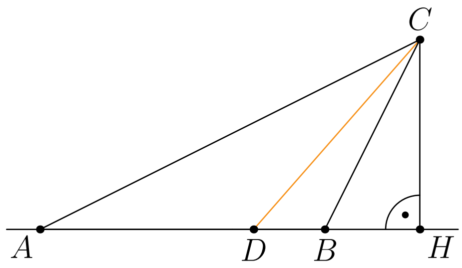
1. Punkt H leży na odcinku AB. Wtedy dla każdego punktu D tego odcinka mamy

   $$|CD|^2 = |CH|^2 + |DH|^2 \geqslant |CH|^2.$$

   Zatem długość odcinka CD jest najmniejsza dla $D = H$.
2. Punkt H leży na prostej AB w ten sposób, że punkty A i H leżą po różnych stronach punktu B, patrz rysunek. Wtedy również punkty D i H leżą po różnych stronach punktu B, zatem $|DH| \geqslant |BH|$. Wynika stąd, że

   $$|CD|^2 = |DH|^2 + |CH|^2 \geqslant |BH|^2 + |CH|^2 = |BC|^2,$$

   czyli $|CD| \geqslant |BC|$. Zatem najmniejsza długość odcinka CD jest otrzymana dla $D = B$.

3. Punkt H leży na prostej AB w ten sposób, że punkty B i H leżą po różnych stronach punktu A. Ten przypadek jest analogiczny do poprzedniego i najmniejsza długość odcinka CD jest otrzymana dla $D = A$.

Zadanie 5

Znajdź największą liczbę m taką, że można wybrać dwadzieścia liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ z przedziału $(1, 2019)$ tak, że istnieje liczba naturalna b, którą można zapisać na m różnych sposobów jako sumę dwóch liczb ze zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_{20}\}$.

Rozwiązanie.

Po pierwsze zauważmy, że nie opłaca się wybierać kilkukrotnie tej samej liczby bo i tak w *zbiorze* $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{20}\}$ wystąpi ona raz. Załóżmy zatem, że liczby $a_1, \ldots, a_{20}$ są parami różne.

Weźmy dowolny wybór liczb i niech b będzie dowolną liczbą. Rozważmy wszystkie m par liczb ze zbioru $\mathcal{A}$ które sumują się do b. Jeśli $b = a_i + a_j$ i $b = a_i + a_k$, to $a_j = a_k$, zatem każda liczba a_i występuje w co najwyżej jednej parze. Żadna liczba oprócz $b/2$ (jeśli $b/2 \in \mathcal{A}$) nie występuje w parze ze sobą. Zatem każda liczba ze zbioru $\mathcal{A}$ występuje tylko raz w powyższych parach, poza liczbą $b/2$ która potencjalnie może wystąpić dwukrotnie. Każda para składa się z dwóch liczb, więc otrzymujemy nierówność $2m \leqslant 20 + 1$, czyli $m \leqslant 10$.

Pozostaje pokazać, że możliwe jest osiągnięcie wartości $m = 10$. To proste: wybieramy liczby $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_{10} = 10$ oraz $a_{11} = 1000 - a_1$, $a_{12} = 1000 - a_2, \ldots, a_{20} = 1000 - a_{10}$. Wtedy $b := 1000$ jest sumą liczb $a_i + a_{10+i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, 10$.

[jj, pg]