



VIII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

ETAP KORESPONDENCYJNY, GIMNAZJUM
ROZWIĄZANIA

ZADANIE 1

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste spełniające równanie

$$(1+x^2)(1+x^6) = 4x^4.$$

Rozwiązanie, sposób I

Po rozwinięciu nawiasów z lewej strony równania z zadania otrzymujemy równanie

$$1+x^2+x^6+x^8=4x^4. \quad (1)$$

Zauważmy, że dla każdych różnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $a^2+b^2 \geq 2ab$, pochodząca od nierówności $(a-b)^2 \geq 0$. Równość zachodzi jedynie dla $a=b$. W szczególności mamy nierówności $1+x^8 \geq 2x^4$ oraz $x^2+x^6 \geq 2x^4$, sumujące się do $1+x^2+x^6+x^8 \geq 4x^4$. Skoro zachodzi równość (1), to we wszystkich tych nierównościach muszą zachodzić równości. W szczególności musi zachodzić $1+x^8=2x^4$, a więc $1=x^8$. Stąd $x=1$ lub $x=-1$. Obie te liczby spełniają wyjściowe równanie.

Rozwiązanie, sposób II

Przypomnijmy, że dla dowolnych rzeczywistych a, b zachodzi $a^2+b^2 \geq 2ab$ oraz równość zachodzi jedynie dla $a=b$. Stosując tę uwagę do 1 i $|x^3|$ otrzymujemy $1+x^6 \geq 2|x^3|$. Stosując tę uwagę do 1 i $|x|$ otrzymujemy $1+x^2 \geq 2|x|$.

Rozważmy dwa przypadki: $|x|=1$ oraz $|x| \neq 1$. W pierwszym z nich $x=\pm 1$ i obie te liczby spełniają wyjściowe równanie.

Załóżmy, że $|x| \neq 1$. Wtedy $1+x^2 > 2|x|$. Nierówności powyższe mają strony dodatnie (dla $x \neq 0$), więc możemy je pomnożyć stronami, otrzymując nową prawdziwą nierówność

$$(1+x^6)(1+x^2) > 4|x^3| \cdot |x| = 4x^4.$$

Ta nierówność daje sprzeczność z równaniem z zadania.

Odpowiedź: Jedyne rozwiązania równania z zadania to $x=1$ i $x=-1$.

Rozwiązanie, sposób III

Równanie z zadania można zapisać w postaci równoważnej

$$1+x^2+x^6+x^8-4x^4=0.$$

Zauważmy, że $1+x^2+x^6+x^8-4x^4 = (x^2-1)^2 \cdot (1+3x^2+x^4)$. Skoro iloczyn ten jest równy 0, to $x^2-1=0$ lub $1+3x^2+x^4=0$. Co więcej, mamy $3x^2 \geq 0$ oraz $x^4 \geq 0$, stąd $1+3x^2+x^4 > 0$.

Ostatecznie stwierdzamy, że $x^2-1=0$, skąd $x=1$ lub $x=-1$; obie te liczby są rozwiązaniami.

Uwaga: można zastanawiać się, jak znaleźliśmy równość $1+x^2+x^6+x^8-4x^4 = (x^2-1)^2 \cdot (1+3x^2+x^4)$. Warto tutaj poczytać o twierdzeniu Bézout.

ZADANIE 2

W trójkącie ABC środki okręgów wpisanego i opisanego pokrywają się. Wykaż, że jest to trójkąt równoboczny.

Rozwiązanie, sposób I

Oznaczmy przez I środek okręgu wpisanego w ABC . Na mocy założenia I pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego. Oznaczmy przez r promień okręgu wpisanego w ABC , zaś przez R promień okręgu opisanego. Niech H oznacza rzut punktu I na bok AB ; wtedy H leży na odcinku AB oraz $IH=r$. Ponadto

$AI = BI = R$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $AH = BH = \sqrt{R^2 - r^2}$ a stąd $AB = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Identycznie dowodzimy, że pozostałe boki trójkąta mają tę długość.

Rozwiązanie, sposób II

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na ABC . Oznaczmy przez H_{AB} , H_{BC} jego rzuty na boki AB i BC . Z jednej strony, punkt O jest przecięciem symetralnych, więc $BH_{AB} = \frac{1}{2}AB$ oraz $BH_{BC} = \frac{1}{2}BC$. Z drugiej strony odcinki BH_{AB} i BH_{BC} są dwoma stycznymi z punktu B do okręgu wpisanego w trójkąt ABC , mają więc równą długość. Zatem

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC, \quad \text{a więc} \quad AB = BC.$$

Stosując to samo rozumowanie do wierzchołka A dowodzimy, że $AB = AC$.

ZADANIE 3

Czy istnieje liczba naturalna, która da się na trzy sposoby zapisać jako suma dwóch różnych liczb pierwszych?

Rozwiązanie.

Tak, przykładową liczbą jest $24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$.

Uwaga: zauważmy, że każda liczba złożona mniejsza od 25 ma dzielnik pierwszy mniejszy od 5, a zatem równy 2 lub 3. Wobec tego każda liczba (poza 1) względnie pierwsza z 24 i mniejsza od 24 jest pierwsza. Takich liczb jest siedem i układają się one w trzy pary powyżej oraz samotną liczbę 23.

Uwaga 2: Powszechnie przyjmuje się, że 1 nie jest liczbą pierwszą (z powodów związanych np. z jednoznacznością rozkładu na czynniki pierwsze).

ZADANIE 4

Pokaż, że liczba

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie, sposób I

Zauważmy, że $20 + 14\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^3$. Zatem $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$. Podobnie $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$, zatem suma tych liczb wynosi 4 i jest całkowita.

Uwaga: co zrobić, by nie uciekać się do sztuczki „zauważmy, że” – patrz następne rozwiązanie.

Rozwiązanie, sposób II

Niech $a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ i $b = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Wtedy $a^3 = 20 + 14\sqrt{2}$, $b^3 = 20 - 14\sqrt{2}$ oraz $ab = \sqrt[3]{400 - 196 \cdot 2} = 2$. Niech $x = a + b$. Wtedy

$$x^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 40 + 6x.$$

Rozwiążmy to równanie. Jednym z rozwiązań jest $x = 4$, więc możemy zapisać $x^3 - 6x - 40 = (x - 4)(x^2 + 4x + 10)$. Skoro $4^2 - 40 < 0$, to nie ma liczb rzeczywistych spełniających $x^2 + 4x + 10 = 0$. Wobec tego $x - 4 = 0$, czyli $x = 4$.

Ciekawostka: każda liczba zbudowana z liczb całkowitych przy użyciu czterech działań oraz symboli pierwiastków spełnia wielomianowe równanie o współczynnikach wymiernych, takie jak $x^3 - 6x - 40 = 0$. Równanie takie może oczywiście mieć duży stopień.

ZADANIE 5

Dane są trzy okręgi. Każde dwa z nich są styczne zewnętrznie. Odcinki łączące środki tych okręgów tworzą trójkąt równoboczny. Pokaż, że wszystkie te okręgi mają równe promienie.

Rozwiązanie.

Oznaczmy środki okręgów przez O_1, O_2, O_3 zaś długości ich promieni przez r_1, r_2, r_3 . Niech X oznacza punkt styczności okręgów o środkach O_1 i O_2 . Wtedy XO_1 i XO_2 są prostopadłe do wspólnej stycznej, zatem równoległe. Proste XO_1 i XO_2 są równoległe i mają wspólny punkt X , zatem pokrywają się. Innymi słowy, punkt X leży na odcinku O_1O_2 . To dowodzi, że długość odcinka O_1O_2 to $r_1 + r_2$. Podobnie

pokazujemy, że długość O_1O_3 to $r_1 + r_3$ zaś długość O_2O_3 to $r_2 + r_3$. Z założenia trójkąt $O_1O_2O_3$ jest równoboczny, więc

$$r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_1.$$

Stąd $r_1 = r_2 = r_3$.

ZADANIE 6

W zależności od n wyznacz sumę cyfr zapisu dziesiętnego wszystkich liczb ze zbioru

$$\{1, 2, 3, \dots, 10^n - 1\}.$$

Rozwiązanie, sposób I

Przyjmijmy, że każda liczba ze zbioru $1, 2, \dots, 10^n - 1$ ma zapis dziesiętny składający się z n cyfr (być może z pewną liczbą zer z przodu). Dorzućmy do zbioru naszych liczb liczbę 0.

Każda liczb z naszego zbioru zapisuje się za pomocą n cyfr i zapisanie *każdego* ciągu n kolejnych cyfr daje jednoznacznie liczbę z naszego zbioru. Operacje te są wzajemnie odwrotne, więc możemy odtąd myśleć o ciągach n cyfr.

Wśród tych ciągów każda cyfra pojawia się $10^n/10$ razy na każdej pozycji, zatem łącznie każda cyfra pojawia się $n \cdot 10^{n-1}$ razy. Wobec tego suma wszystkich cyfr wszystkich ciągów wynosi $(1 + 2 + \dots + 9) \cdot n \cdot 10^{n-1} = 45 \cdot n \cdot 10^{n-1}$.

Rozwiązanie, sposób II

Oznaczmy przez S_n sumę z zadania, zaś przez Z_n zbiór $\{0, 1, 2, \dots, 10^n - 1\}$. Biorąc każdą liczbę ze zbioru Z_n i dopisując na końcu jej zapisu dziesiętnego każdą możliwą cyfrę, otrzymujemy zbiór $\{0, 1, 2, \dots, 10^{n+1} - 1\} = Z_{n+1}$.

Zatem $S_{n+1} = 10S_n + 10^n \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 10(S_n + 45 \cdot 10^{n-1})$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} S_n &= 10S_{n-1} + 45 \cdot 10^{n-1} = 10(10S_{n-2} + 45 \cdot 10^{n-2}) + 45 \cdot 10^{n-1} = 10^2S_{n-2} + 45 \cdot 2 \cdot 10^{n-1} = \\ &= 10^2(10S_{n-3} + 45 \cdot 10^{n-3}) + 45 \cdot 2 \cdot 10^{n-1} = 10^3S_{n-3} + 45 \cdot 3 \cdot 10^{n-1} = \\ &\dots = 10^nS_0 + 45 \cdot n \cdot 10^{n-1} = 45 \cdot n \cdot 10^{n-1}. \end{aligned}$$