



VII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

ETAP KORESPONDENCYJNY, GIMNAZJUM
ROZWIĄZANIA

ZADANIE 1

Na płaszczyźnie narysowano trzy okręgi, przy czym otrzymano dokładnie pięć punktów przecięcia. Dowiedz, że pewne dwa z narysowanych okręgów są styczne.

Uwaga: Punkt przecięcia to punkt, przez który przechodzą co najmniej dwa okręgi.

Rozwiązanie.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy trzy okręgi mają punkt wspólny. Wtedy każda para okręgów przecina się co najwyżej w jeszcze jednym punkcie, więc punktów przecięcia jest $4 < 5$. Możemy zatem założyć, że taki punkt wspólny nie istnieje.

Założmy, że żadne dwa okręgi nie są styczne. Wobec tego każda para okręgów ma zero lub dwa punkty wspólne. Skoro tak, to liczba wszystkich punktów przecięcia jest parzysta, sprzeczność.

ZADANIE 2

Wiek Ani ostatniego dnia roku 2015 będzie równy sumie cyfr roku jej urodzenia. W którym roku urodziła się Ania? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Niech $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ oznacza rok urodzenia Ani, gdzie $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. W ostatnim dniu 2015 roku będzie ona miała $2015 - (1000a + 100b + 10c + d)$ lat. Warunki zadania są równoważne stwierdzeniu, że $2015 - (1000a + 100b + 10c + d) = a + b + c + d$, czyli

$$2015 = 1001a + 101b + 11c + 2d.$$

Jeżeli $a > 2$ to prawa strona powyższego równania jest większa od 3000. Jeżeli $a = 0$, to jest ona nie większa niż $(101 + 11 + 2) \cdot 9 < 114 \cdot 10 < 2000$. Wobec tego pozostają dwie możliwości: $a = 1$ lub $a = 2$.

1. Jeżeli $a = 1$ to otrzymujemy równanie $1014 = 101b + 11c + 2d$. Skoro $11c + 2d < 130$ oraz $b \leq 9$, to $b = 9$, czyli $105 = 11c + 2d$. Wynika stąd, że c jest nieparzyste. Ponadto $2d < 20$, więc $c \geq 8$. Stąd $c = 9$, $d = 3$ i Ania urodziła się w 1993 roku.

2. Jeżeli $a = 2$, to $b = 0$ i otrzymujemy równanie $13 = 11c + 2d$. Wobec tego c jest nieparzyste i $c \leq 1$, stąd $c = 1$, $d = 1$ i Ania urodziła się w 2011 roku.

Odpowiedź: Ania urodziła się w 1993 lub 2011 roku.

ZADANIE 3

Równoległobok $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Udowodnij, że jest on prostokątem.

Rozwiązanie.

Rozważmy kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ przy wierzchołkach A, B, C, D . Skoro $ABCD$ jest równoległobokiem, to $\alpha = \gamma$ oraz $\beta = \delta = 180 - \alpha$.

Oznaczmy przez O środek okręgu. Kąty (wkłęsły i wypukły) BOD dopełniają się do 360° i mają miary 2α oraz 2γ . Stąd $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Skoro $\alpha = \gamma$, to

$$\alpha = \gamma = 90^\circ, \quad \text{zatem} \quad \beta = \delta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

czyli $ABCD$ jest prostokątem.

ZADANIE 4

Niech $S(a)$ oznacza sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby a . Wyznacz wszystkie 100-cyfrowe dodatnie liczby całkowite a dla których iloraz

$$\frac{a}{S(a)}$$

jest największy.

Rozwiązanie, I sposób

Niech $a_{99}, a_{98}, \dots, a_0$ oznaczają cyfry liczby a , tzn.

$$a = a_{99} \cdot 10^{99} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Wtedy $S(a) = a_{99} + a_{98} + \dots + a_0$ oraz

$$\frac{a}{S(a)} = \frac{a_{99} \cdot 10^{99} + a_{98} \cdot 10^{98} + \dots + a_0}{a_{99} + a_{98} + \dots + a_0} \leq \frac{a_{99} \cdot 10^{99} + a_{98} \cdot 10^{99} + \dots + a_0 \cdot 10^{99}}{a_{99} + a_{98} + \dots + a_0} = \frac{10^{99}(a_{99} + \dots + a_0)}{a_{99} + \dots + a_0} = 10^{99}.$$

Wobec tego zawsze $a/S(a) \leq 10^{99}$. Równość zachodzi, wtedy i tylko wtedy, gdy powyższe szacowanie jest dokładne, tzn. gdy $a_{99} \cdot 10^{99} + a_{98} \cdot 10^{98} + \dots + a_0 = a_{99} \cdot 10^{99} + a_{98} \cdot 10^{99} + \dots + a_0 \cdot 10^{99}$. Zapis dziesiętny jest jednoznaczny, więc wynika stąd, że $a_{98} \cdot 10^{98} = a_{99} \cdot 10^{99}$, $a_{97} \cdot 10^{97} = a_{98} \cdot 10^{98}$ itd. czyli $a_{98} = a_{97} = \dots = a_0$.

Odpowiedź: iloraz ten jest największy dla liczb postaci $a_{99} \cdot 10^{100}$, gdzie $a_{99} \in \{1, \dots, 9\}$.

II sposób

Powyższe rozwiązanie można opowiedzieć nieco mniej „na palcach”. Niech a będzie liczbą stycyfrową, zaś A będzie jej cyfrą wiodącą, wtedy $a = A \cdot 10^{99} + b$, dla pewnego $0 \leq b < 10^{99}$. Jeżeli $b = 0$, to iloraz $a/S(a)$ wynosi 10^{99} . Pokażemy, że dla $b \neq 0$ ten iloraz jest mniejszy.

Jeżeli $b \neq 0$, to $S(b) \geq 1$ oraz $S(a) = A + S(b)$. Zatem

$$\frac{a}{S(a)} = \frac{A \cdot 10^{99} + b}{A + S(b)} \leq \frac{A \cdot 10^{99} + b}{A + 1} < \frac{A \cdot 10^{99} + 10^{99}}{A + 1} = 10^{99}.$$

Odpowiedź: iloraz ten jest największy dla liczb postaci $A \cdot 10^{100}$, gdzie $A \in \{1, \dots, 9\}$.

ZADANIE 5

Kwadratową tablicę 2015×2015 wypełniono liczbami całkowitymi w ten sposób, że suma każdego wiersza, każdej kolumny i obydwu głównych przekątnych jest równa zero. Czy może się zdarzyć, że żadna spośród wpisanych liczb nie jest zerem? Odpowiedź dokładnie uzasadnij.

Rozwiązanie.

Odpowiedź: Tak może się zdarzyć.

Rozważmy najpierw przypadek tablicy 5×5 . Poniższy kwadrat pokazuje, że możliwe jest takie wypełnienie, że suma każdego wiersza, kolumny i obydwu głównych przekątnych jest równa zero (*skądinąd ten problem jest bardzo zbliżony do problemu rozstawienia n wież na planszy $n \times n$ tak, by żadne dwie nie atakowały się, czy widzisz dlaczego?*).

-4	1	1	1	1
1	1	1	-4	1
1	-4	1	1	1
1	1	1	1	-4
1	1	-4	1	1

Mając powyższy kwadrat, wypełniamy tablicę 2015×2015 kładąc $\frac{2015}{5} = 403$ rzędów po 403 takich kwadratów. Suma każdego wiersza tablicy jest sumą 403 wierszy kwadratów, więc jest równa zero. Podobnie dla kolumn i głównych przekątnych.

ZADANIE 6

Rozstrzygnij, która z liczb $\sqrt{2011} + \sqrt{2013} + \sqrt{2015} + \sqrt{2017}$ oraz $4\sqrt{2014}$ jest większa. Odpowiedź dokładnie uzasadnij.

Uwaga: w uzasadnieniu nie powołuj się na obliczenia na kalkulatorze, czy komputerze.

Rozwiązanie.

Skorzystamy z pomocniczej nierówności, którą podajemy poniżej. Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Wtedy

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{\frac{a+b}{2}}. \quad (1)$$

By jej dowieść, podnieśmy obie strony (które są dodatnie!) do kwadratu. Otrzymujemy $a + b + 2\sqrt{ab} \leq 2(a + b)$. Przenieśmy wszystkie wyrazy na prawą stronę. Mamy pokazać, że $0 \leq a + b - 2\sqrt{ab}$. Ale $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Wobec tego nierówność (1) jest prawdziwa.

Pozostaje sprytnie pogrupować. Podstawiając w nierówności (1) liczby $a = 2011$ i $b = 2017$ otrzymujemy

$$\sqrt{2011} + \sqrt{2017} < 2\sqrt{2014}.$$

Podstawiając $a = 2013$ i $b = 2015$ otrzymujemy

$$\sqrt{2013} + \sqrt{2015} < 2\sqrt{2014}.$$

Sumując te nierówności stwierdzamy, że

$$\sqrt{2011} + \sqrt{2013} + \sqrt{2015} + \sqrt{2017} < 4\sqrt{2014}.$$