

IV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania etapu korespondencyjnego - gimnazjum - rozwiązania

1. W przestrzeni trójwymiarowej punkt M jest środkiem każdego z odcinków AD, BE, CF . Uzasadnić, że trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ są przystające.

Rozwiązanie. Skoro M jest punktem przecięcia prostych AD i BE , to punkty A, B, D, E oraz M leżą w jednej płaszczyźnie wyznaczonej przez proste AD i BE . Widać stąd, że M jest punktem przecięcia przekątnych AD i BE czworokąta $ABDE$, przy czym M dzieli każdą z przekątnych na połowy.

Trójkąty $\triangle ABM$ i $\triangle DEM$ są przystające na mocy cechy bok-kąt-bok, gdyż $AM = DM$, $BM = EM$ i $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DME$, a więc w szczególności $AB = DE$. Analogicznie uzasadniamy, że $BC = EF$ oraz $AC = DF$. W trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ odpowiednie boki mają równe długości, a więc są one przystające.

II Rozwiązanie. Skoro M jest środkiem AD, BE, CF to odbiciem symetrycznym punktów A, B, C względem M są punkty D, E, F , więc odbiciem symetrycznym trójkąta $\triangle ABC$ jest trójkąt $\triangle DEF$.

Odbicie symetryczne zachowuje długości odcinków, więc $AB = DE, BC = EF, CA = FD$, zatem trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ są przystające.

2. Wykazać, że jeśli liczby a, b są nieujemne to

$$(a+b)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)(a^3+b^3).$$

Rozwiązanie. Skorzystamy z następujących wzorów skróconego mnożenia:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{oraz} \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Mamy

$$\begin{aligned} (a+b)(a^4+b^4) - (a^2+b^2)(a^3+b^3) &= \\ a^5 + b^5 + a^4b + ab^4 - (a^5 + b^5 + a^2b^3 + a^3b^2) &= \\ a^4b + ab^4 - a^2b^3 - a^3b^2 &= \\ ab(a^3 + b^3) - a^2b^2(a+b) &= ab(a+b)(a^2 - ab + b^2) - a^2b^2(a+b) = \\ ab(a+b)(a^2 - 2ab + b^2) &= ab(a+b)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie jest nieujemne, gdyż każda z liczb $a, b, a+b, (a-b)^2$ jest nieujemna.

3. Która z liczb: $6^{7^{8^9}}$, $9^{8^{7^6}}$ jest większa? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie. Udowodnimy, że większa jest liczba $6^{7^{8^9}}$.

Zauważmy, że $6^{7^{8^9}} > 3^{7^{8^9}}$ oraz $9^{8^{7^6}} = 3^{2 \cdot 8^{7^6}}$, więc wystarczy udowodnić, że $3^{7^{8^9}} > 3^{2 \cdot 8^{7^6}}$, czyli równoważnie

$$7^{8^9} > 2 \cdot 8^{7^6}.$$

Oczywiście $7^{8^9} > 2^{8^9}$ i $2 \cdot 8^{7^6} = 2^{1+3 \cdot 7^6}$, więc wystarczy dowieść, że $2^{8^9} > 2^{1+3 \cdot 7^6}$, czyli równoważnie

$$8^9 > 1 + 3 \cdot 7^6.$$

Ta nierówność wynika z następującego ciągu nierówności

$$8^9 = 8 \cdot 8^8 > 4 \cdot 8^8 = 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 > 1 + 7^6 + 7^6 + 7^6 = 1 + 3 \cdot 7^6.$$

4. Wyznaczyć wszystkie przedstawienia liczby 2012 w postaci sumy kolejnych liczb całkowitych.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że liczba $2012 = 4 \cdot 503$ jest sumą k kolejnych liczb całkowitych. Oznaczmy przez x najmniejszy ze składników, czyli

$$x + (x + 1) + \dots + (x + k - 1) = 4 \cdot 503.$$

Ponieważ $1 + 2 + \dots + (k - 1) = k(k - 1)/2$, więc lewa strona powyższej równości wynosi

$$kx + \frac{k(k - 1)}{2} = \frac{k(2x + k - 1)}{2}.$$

Otrzymujemy zatem równość:

$$k(2x + k - 1) = 8 \cdot 503.$$

Suma czynników lewej strony jest liczbą nieparzystą, więc liczby k oraz $2x + k - 1$ są różnej parzystości. Oznacza to, że możliwe są cztery przypadki:

k	$2x + k - 1$	x	
1	4024	2012	2012
8	503	248	$248 + 249 + \dots + 255$
503	8	-247	$-247 + (-246) + \dots + 255$
4024	1	-2011	$-2011 + (-2010) + \dots + 2012$

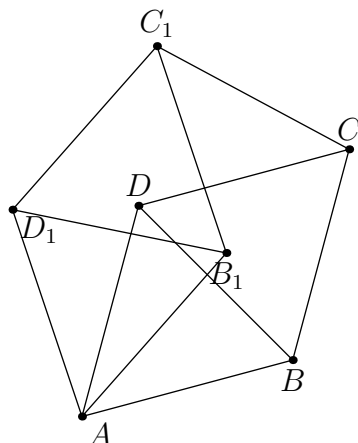
5. Czy na płaszczyźnie można wybrać 7 punktów tak, aby wśród dowolnych trzech spośród nich istniały dwa punkty odległe od siebie o 1?

Rozwiązanie. Udowodnimy, że punkty o żądanej własności istnieją. W tym celu rozważmy romb $ABCD$ o kącie 60° przy wierzchołku A i boku długości 1. Niech $AB_1C_1D_1$ będzie obrazem rombu $ABCD$ przy obrocie wokół A o kąt α taki, że punkty C i C_1 są

odległe od siebie o 1. Udowodnimy, że punkty $A, B, B_1, C, C_1, D, D_1$ spełniają warunki zadania.

Jeśli wybrane trzy punkty należą do jednego z rombów $ABCD$ lub $AB_1C_1D_1$, to oczywiście przynajmniej dwa są kolejnymi wierzchołkami rombu, a więc są odległe o 1. Przypuśćmy więc, że wybrany został jeden wierzchołek X w rombie $AB_1C_1D_1$ i dwa Y i Z w rombie $ABCD$. Jeśli Y, Z są sąsiednimi wierzchołkami lub przeciwległymi B i D , to odległość między nimi jest równa 1.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy Y, Z są przeciwległymi wierzchołkami A i C .



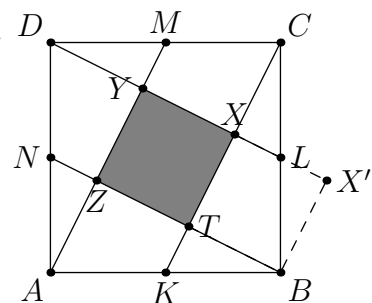
Wówczas X jest albo jednym z wierzchołków B_1, D_1 (które są odległe od A o 1), albo X jest wierzchołkiem C_1 , który jest odległy od C o 1. Stąd wśród dowolnych trzech punktów spośród $A, B, B_1, C, C_1, D, D_1$ pewne dwa są odległe o 1.

6. Pole kwadratu $ABCD$ wynosi 5. Punkty K, L, M, N są środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Obliczyć, ile wynosi pole kwadratu $XYZT$ ograniczonego prostymi CK, DL, AM i BN .

Rozwiązanie. Niech X' oznacza punkt symetryczny do X względem L . Punkt B jest symetryczny do C względem L , więc trójkąty $\triangle XLC$ i $\triangle X'LB$ są przystające, więc odcinki CX i BT są równe.

Kąty $\angle LXT, \angle XTB, \angle XX'B$ są proste, więc $XTBX'$ jest prostokątem.

Skoro odcinki CX i BT są równe, to $BX' = CX = BT$, więc $XX'BT$ jest kwadratem przystającym do $XYZT$. Kwadrat $XX'BT$ ma pole równe polu $\triangle BCT$, więc pola $\triangle BCT$ i $XYZT$ są równe.



Z tych samych powodów trójkąty $\triangle AZB, \triangle DY A$ oraz $\triangle CXD$ mają pola równe polu kwadratu $XYZT$. Kwadrat $ABCD$ składa się więc z pięciu części o równych polach (równych polu $XYZT$), a więc pole kwadratu $XYZT$ jest równe 1.

II Rozwiązanie – szkic. Pole kwadratu $ABCD$ jest równe 5, a więc jego bok jest równy $\sqrt{5}$. Tak jak w poprzednim rozwiązaniu dowodzimy, że $TB = AZ$. Oznaczmy tę długość przez x .

Z twierdzenia Talesa wnioskujemy, że

$$\frac{ZB}{TB} = \frac{AB}{KB} = 2, \text{ więc } ZB = 2 \cdot TB = 2x.$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $\triangle AZB$ otrzymujemy równość

$$ZB^2 + AZ^2 = AB^2 \text{ czyli } 4x^2 + x^2 = \sqrt{5}^2 = 5, \text{ więc } x = 1.$$

Pole kwadratu $XYZT$ wynosi więc 1.