



XV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - juniorzy

18 marca 2023 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Po podstawieniu $y = 2 - x$ do drugiego równania, otrzymujemy $x(2 - x) - z^2 = 1$, czyli $0 = x^2 - 2x + 1 + z^2 = (x - 1)^2 + z^2$. Kwadraty liczb rzeczywistych są nieujemne, więc to oznacza, że $x - 1 = 0$, $z = 0$. Jedynym rozwiązaniem jest trójka $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

2. Wyznacz wszystkie trzycyfrowe liczby $\overline{abc}$ takie, że

$$2 \cdot \overline{abc} = \overline{cab} + \overline{bca}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Równanie z zadania możemy przepisać jako $200a + 20b + 2c = 110c + 11a + 101b$, czyli $189a - 81b - 108c = 0$. Skoro $189 = 81 + 108$, to możemy dalej zapisać to jako $108(a - c) - 81(b - a) = 0$, czyli $108(a - c) = 81(b - a)$. Dzieląc stronami przez 27, otrzymujemy $4(a - c) = 3(b - a)$. Dodając do obu stron $3(a - c)$, dostajemy wreszcie

$$7(a - c) = 3(b - c). \quad (1)$$

Skoro $0 \leq b, c \leq 9$, to $-9 \leq b - c \leq 9$. Liczba $b - c$ jest podzielna przez 7, więc mamy trzy przypadki.

1. $b - c = -7$. W tym przypadku $b = c - 7$. Z równania (1) otrzymujemy też $7(a - c) = -21$, więc $a = c - 3$. Skoro $b \geq 0$ i $b = c - 7$, to $c \geq 7$. Mamy więc trzy przypadki $c = 7, 8, 9$ i odpowiadające im rozwiązania $\overline{abc} = 407, 518, 629$.
2. $b - c = 0$. Z równania (1) wynika, że $a - c = 0$, zatem $a = b = c$. To daje dziewięć rozwiązań $\overline{abc} = 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999$.
3. $b - c = 7$. Z równania (1) wynika, że $a - c = 3$. Skoro $b \leq 9$ oraz $b - c = 7$, to $c \leq 2$. Mamy tu trzy przypadki $c = 0, 1, 2$ i odpowiadające im rozwiązania $\overline{abc} = 370, 481, 592$.

Odpowiedź: Łącznie jest 15 takich liczb, są to 111, 222, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 777, 888, 999.

3. Punkt D leży we wnętrzu trójkąta ABC i spełnia warunki $\sphericalangle ADB = 90^\circ$, $\sphericalangle BDC = 150^\circ$, $\sphericalangle CDA = 120^\circ$. Udowodnij, że istnieje punkt E różny od D taki, że jeśli F jest odbiciem E względem AD , G jest odbiciem F względem BD , zaś H jest odbiciem G względem CD , to $H = E$.

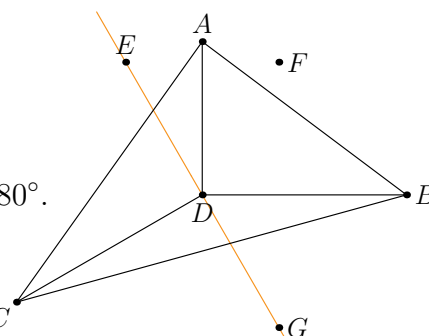
Rozwiązanie.

Ustalmy punkt E tak, że $\sphericalangle BDE = 120^\circ$ oraz punkt E leży wewnątrz kąta ADC . Wtedy $\sphericalangle ADE = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Wynika stąd, że $\sphericalangle ADF = 30^\circ$, więc $\sphericalangle BDF = 60^\circ$. Zatem $\sphericalangle BDG = 60^\circ$. Pokazuje to, że

$$\sphericalangle EDG = \sphericalangle EDA + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDG = 30^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Zatem punkty E , D , G leżą na jednej prostej. Ponadto $|DG| = |DF| = |DE|$, czyli punkty E i G są symetryczne do siebie względem D .

Wreszcie, mamy $\sphericalangle CDG = \sphericalangle CDB - \sphericalangle BDG = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$, zatem CD jest prostopadła do EG i przecina EG w połowie. To pokazuje, że punkty E i G są symetryczne do siebie względem CD , czyli $E = H$.



4. Do finału Konkursu Matematycznego zakwalifikowało się siedmiu uczniów. Okazało się, że w tej grupie jest co najmniej 13 par uczniów znających się. Wykaż, że wśród finalistów istnieje trójka uczniów wzajemnie znających się. Czy liczbę 13 można zamienić na 12?

Rozwiązanie.

Niech U będzie uczniem z największą liczbą znajomych, których oznaczmy przez $U_1, U_2, \dots, U_d$. Wówczas $d \geq 4$. Gdyby bowiem każdy uczeń miał co najwyżej trzech znajomych, to liczba par znajomych nie przekraczałaby $\frac{3 \cdot 7}{2} < 11$.

Jeśli wśród $U_1, U_2, \dots, U_d$ jest para znajomych (U_i, U_j) , to (U, U_i, U_j) jest trójką uczniów wzajemnie znających się. Ten przypadek ma miejsce, gdy $d = 6$. Załóżmy więc, że $4 \leq d \leq 5$ i wśród $U_1, U_2, \dots, U_d$ nie ma pary znajomych. Pozostałe pary znajomych mają więc postać (U_i, X) , gdzie X jest uczniem różnym od $U, U_1, U_2, \dots, U_d$. Jeśli $d = 4$, to X może być jednym z dwóch pozostałych uczniów; nazwijmy ich X_1 i X_2 . Wówczas liczba par znajomych nie przekracza $4 + 2 \cdot 4 + 1 = 13$, przy czym 13 otrzymujemy tylko wtedy, gdy X_1 i X_2 znają się i każdy z nich zna wszystkich spośród U_1, U_2, U_3, U_4 . Wówczas dowolny uczeń U_i z dwójką X_1 i X_2 tworzą trójkę uczniów wzajemnie znających się. Niech $d = 5$. Wówczas mamy dokładnie jednego ucznia X , który nie jest znajomym ucznia U . Ten przypadek nie może zajść, gdyż łączna liczba par znajomych nie przekracza wtedy $5 + 5 = 10$, wbrew założeniu.

To, że liczbę 13 nie można zamienić na 12 pokazuje sytuacja, gdy mamy dwie grupy uczniów A_1, A_2, A_3 oraz B_1, B_2, B_3, B_4 takie, że każdy A_i zna każdego B_j i innych znajomości nie ma.