

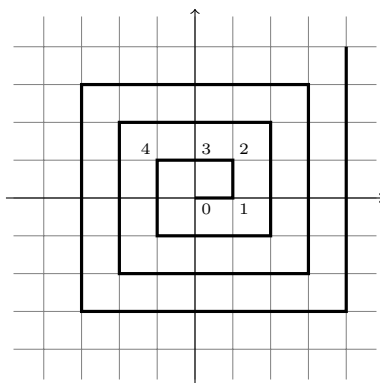


XIV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - juniorzy

28 maja 2022 r.

1. Nieskończona łamana przedstawiona na poniższym rysunku nosi nazwę *spirali Ulama*.



Kolejne punkty kratowe (czyli punkty o obu współrzędnych całkowitych) należące do tej łamanej numerujemy kolejnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi, jak na rysunku. Jaki numer będzie miał punkt (n, n) ?

Rozwiązanie, sposób pierwszy

Oznaczmy przez $f(k, n)$ numer punktu (k, n) . Droga od punktu $(0, 0)$ do punktu (n, n) składa się z kolejnych odcinków w czterech kierunkach: wschodnim (E), północnym (N), zachodnim (W) oraz południowym (S). Długości odcinków w poszczególnych kierunkach zawiera poniższa tabela

E	N	W	S
1	1	2	2
3	3	4	4
5	5	6	6
7	7	8	8
...	...	...	...
$2n - 1$	$2n - 1$		

Zauważmy, że jeśli $n \geq 0$, to numer punktu (n, n) jest sumą liczb występujących w tabeli. Dodając liczby kolumnami i korzystając ze wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 f(n, n) &= (1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)) + (1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)) \\
 &\quad + (2 + 4 + 6 + \dots + (2n - 2)) + (2 + 4 + 6 + \dots + (2n - 2)) \\
 &= n^2 + n^2 + n(n - 1) + n(n - 1) = 4n^2 - 2n.
 \end{aligned}$$

Zauważmy także, iż $f(-n, -n) = f(n, n) + 2n + 2n = 4n^2 + 2n$.

Rozwiązanie, sposób drugi

Zauważmy, że $f(n, n)$ jest liczbą punktów kratowych w prostokącie $\mathcal{P}$ rozmiarów $(2n - 2) \times (2n - 1)$, którego wierzchołkami są punkty

$$(n, n - 1), (-n + 1, n - 1), (-n + 1, -n), (n, -n + 1).$$

Rzeczywiście, punkt $(0, 0)$ ma numer 0, więc $f(n, n - 1)$ jest liczbą o jeden mniejszą od liczby punktów kratowych w $\mathcal{P}$. Na bokach tego prostokąta leży odpowiednio $2n$ i $2n - 1$ punktów kratowych, więc w $\mathcal{P}$ znajduje się $f(n, n) = 2n(2n - 1) = 4n^2 - 2n$ punktów kratowych.

2. Pokaż, że istnieją dodatnie liczby niewymierne a, b takie, że

$$a + b, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{oraz} \quad ab$$

są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie.

Niech $a = 2 - \sqrt{3}$ oraz $b = 2 + \sqrt{3}$. Wtedy $a + b = 4$, $ab = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$. Ponadto

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a + b}{ab} = \frac{2}{1} = 2,$$

zatem wszystkie liczby z zadania są całkowite. Pozostaje pokazać, że a i b są niewymierne (jest to stosunkowo znany argument). Jeśli a jest wymierna, to $\sqrt{3} = 2 - a$ także. Niech $\sqrt{3} = p/q$, gdzie p, q są całkowite dodatnie i niemające wspólnego dzielnika. Wtedy $3q^2 = p^2$, zatem 3 dzieli p^2 , zatem 3 dzieli p , zatem 3^2 dzieli p^2 , zatem 9 dzieli $3q^2$, zatem 3 dzieli q^2 , zatem 3 dzieli q , co daje sprzeczność z założeniem o braku wspólnego dzielnika. Dowód niewymierności b przebiega podobnie.

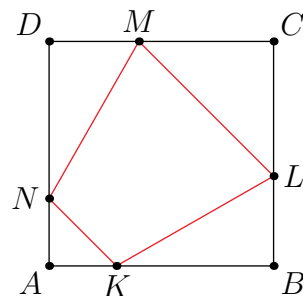
Uwaga: istnieje wiele podobnych rozwiązań, na przykład $2 - \sqrt{2}$ oraz $2 + \sqrt{2}$.

3. Kwadrat $ABCD$ ma bok długości 2022. Punkty K, L, M, N leżą na bokach AB, BC, CD, DA tego kwadratu. Wyznacz największą możliwą długość obwodu czworokąta $KLMN$. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Z nierówności trójkąta wynika, że $|KL| \leq |KB| + |BL|$, $|LM| \leq |LC| + |CM|$, $|MN| \leq |MD| + |DN|$, $|NK| \leq |NA| + |AK|$. Łącznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} & |KL| + |LM| + |MN| + |NL| \leq \\ & |KB| + |BL| + |LC| + |CM| + \\ & + |MD| + |DN| + |NA| + |AK| = \\ & = (|AK| + |KB|) + (|BL| + |LC|) + (|CM| + |MD|) + (|DN| + |NA|) \\ & = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 4 \cdot 2022. \end{aligned}$$



Biorąc $K = A, L = B, M = C, N = D$, otrzymujemy wszędzie powyżej równości. Zatem największy możliwy obwód wynosi 8088.

4. Liczba $n \geq 2$ jest całkowita. Liczby od 1 do $n - 1$ zapisano obok siebie (w systemie dziesiętnym) i policzono, ile razy występuje w tym napisie każda z cyfr. Okazało się, że każda z cyfr 1, 2, 3, ..., 9 występuje tyle samo razy. Pokaż, że n jest potęgą liczby 10.

Sposób pierwszy

Założmy, że cyframi liczby n są $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$, gdzie a_k jest pierwszą cyfrą w zapisie itd. aż do cyfry jedności a_0 . Liczby mniejsze od n są trzech kategorii:

1. liczby, które mają co najwyżej k cyfr. Wtedy cyfry te możemy dobierać dowolnie, w szczególności jest wśród nich tyle samo jedynek co dziewiątek.
2. liczby mające dokładnie $k + 1$ cyfr i pierwszą cyfrę ściśle mniejszą od a_k (jeśli $a_k = 1$, to tę część pomijamy). W każdej takiej liczbie możemy znowu dowolnie wybrać wszystkie cyfry poza pierwszą, a pierwszą cyfrę możemy wybrać dowolnie spośród $\{1, 2, \dots, a_k - 1\}$. Zauważmy, że ta pierwsza cyfra zawsze może być jedynką, ale nigdy dziewiątką. Zatem wśród tych liczb, w zapisie dziesiętnym jedynek jest łącznie o 10^k więcej niż dziewiątek.
3. liczby mające dokładnie $k + 1$ cyfr i pierwszą cyfrę równą a_k . Na pierwszej pozycji pojawia się wtedy cyfra a_k , lecz pojawia się ona mniej niż 10^k razy (pojawia się dokładnie $\overline{a_{k-1}a_{k-2} \dots a_0}$ razy). Na pozostałych pozycjach każda cyfra pojawia się tyle samo razy, co gdyby n była liczbą o cyfrach $a_{k-1}a_{k-2} \dots a_0$.

Z powyższych trzech uwag wynika, że zawsze 1 pojawia się co najmniej tyle samo razy co 9. Ponadto jeśli założymy, że 1 pojawia się dokładnie tyle samo razy, to przypadek 2. nie może zachodzić, tzn. musi być $a_k = 1$. Ale wtedy w przypadku trzecim jedynka pojawia się $\overline{a_{k-1}a_{k-2} \dots a_0}$ razy na pierwszej pozycji i co najmniej tyle samo razy co dziewiątka na pozostałych pozycjach, zatem musi być $\overline{a_{k-1}a_{k-2} \dots a_0} = 0$ i $n = 10^k$.

Sposób drugi

Liczby a i b nazywamy *i-tymi siostrami* jeśli w zapisie dziesiętnym wszystkie cyfry mają identyczne, poza pozycją i , na której jedna ma dziewiątkę, a druga jedynkę. Dla danego i , znając jedną z i -tych sióstr, można jednoznacznie odtworzyć drugą.

Rozważmy teraz dowolne n jak w zadaniu. Niech $\text{One}(i)$ oznacza ile razy w napisie z zadania cyfra 1 wystąpiła na i -tej pozycji. Podobnie, niech $\text{Nine}(i)$ oznacza, ile razy wystąpiła na i -tej pozycji cyfra 9. Z założenia o n mamy, że

$$\text{One}(0) + \text{One}(1) + \text{One}(2) + \dots = \text{Nine}(0) + \text{Nine}(1) + \text{Nine}(2) + \dots \quad (1)$$

Wybermy i . Jeśli wśród liczb od 1 do $n - 1$ występuje pewna liczba a , która ma 9 na i -pozycji, to wśród tych liczb występuje też jej i -ta siostra, która jest jednoznacznie wyznaczona oraz ma 1 na i -tej pozycji. Zatem $\text{Nine}(i) \leq \text{One}(i)$, dla każdego i . Aby równość (1) była spełniona przy tych nierównościach, musi zachodzić $\text{Nine}(i) = \text{One}(i)$, czyli dla każdego a mniejszego od n oraz dla każdej pozycji i również i -ta siostra a jest mniejsza niż n .

Założmy, że n ma k cyfr. Jeśli n nie jest potęgą dziesiątki, to 10^{k-1} jest mniejsze niż n , więc z uwagi powyżej również jej k -ta siostra jest mniejsza od n , innymi słowy $9 \cdot 10^{k-1} < n$. Stąd wynika w szczególności, że

$$\underbrace{11 \dots 1}_k < \underbrace{90 \dots 0}_{k-1} < n.$$

Znowu z uwagi powyżej, k -ta siostra liczby $\underbrace{11\dots1}_k$ jest mniejsza od n . Ta siostra to $9\underbrace{1\dots1}_{k-1}$. Kolejny raz z uwagi, $(k-1)$ -sza siostra liczby $9\underbrace{1\dots1}_{k-1}$ jest mniejsza od n . Ta siostra to $99\underbrace{1\dots1}_{k-2}$. Kontynuując ten argument, dochodzimy do wniosku, że $\underbrace{99\dots9}_k$ jest mniejsze od n , zatem n nie może mieć k cyfr, sprzeczność. To kończy dowód.

[pg, jj]