



XII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - juniorzy

12 czerwca 2021 r.

1. Czy istnieje liczba naturalna taka, że po wykreśleniu pierwszej cyfry jej zapisu dziesiętnego otrzymujemy liczbę 111 razy mniejszą?

Rozwiązanie.

Założmy, że taka liczba istnieje i że ma ona n cyfr, z których pierwsza to a . Wtedy ta liczba ma postać

$$10^{n-1} \cdot a + r$$

gdzie r jest liczbą powstałą przez wykreślenie pierwszej cyfry jej zapisu dziesiętnego. Warunek z zadania mówi, że

$$10^{n-1} \cdot a + r = 111 \cdot r,$$

a stąd $10^{n-1} \cdot a = 110 \cdot r$. W szczególności, liczba $10^{n-1} \cdot a$ jest podzielna przez 11. Ale 11 jest liczbą pierwszą i nie dzieli ona ani 10 a liczby a , bo $1 \leq a \leq 9$. Otrzymujemy sprzeczność.

Odpowiedź: taka liczba nie istnieje.

2. Wyznacz najmniejsze liczby całkowite dodatnie a , b takie, że $b > 1$ oraz

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b.$$

Rozwiązanie.

Wyrażenie z zadania możemy zapisać jako

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{4}}} = a^{\frac{7}{8}}.$$

Zatem szukamy najmniejszych liczb całkowitych dodatnich a , $b > 1$ takich, że $a^{\frac{7}{8}} = b$, czy równoważnie, że $a^7 = b^8$. Zauważmy, że para liczb $b = 2^7$ oraz $a = 2^8$ spełnia warunki zadania. Pokażemy, że jest ona najmniejsza.

Skoro $b > 1$ to istnieje liczba pierwsza p dzieląca b . Załóżmy, że $b = p^k \cdot c$, gdzie c jest niepodzielne przez p . Wtedy

$$a^7 = b^8 = p^{8k} \cdot c^8.$$

Założmy, że $a = p^l \cdot d$, gdzie d jest niepodzielne przez p . Wtedy $a^7 = p^{7l} \cdot d^7$. Zatem największą potęgą p dzielącą $a^7 = b^8$ jest z jednej strony $7l$ a z drugiej $8k$, czyli $7l = 8k$. Wynika stąd, że $k \geq 7$, więc $b \geq p^7 \geq 2^7$. Podobnie, l jest dodatnie i podzielne przez 8, więc $l \geq 8$ i stąd $a \geq p^l \geq p^8 \geq 2^8$. To kończy dowód.

3. Punkt X leży wewnątrz sześciokąta foremnego o boku długości 2021. Oblicz sumę odległości punktu X od sześciu prostych zawierających boki tego sześciokąta.

Rozwiązanie.

Rozważmy dwa przeciwległe boki sześciokąta. Są one równoległe, a X leży pomiędzy zawierającymi je prostymi, więc suma odległości X od tych boków jest równa odległości pomiędzy tymi bokami, czyli $2021 \cdot \sqrt{3}$. Zatem suma odległości X od wszystkich sześciu boków wynosi $6063 \cdot \sqrt{3}$.

Rozwiązanie, sposób II

Oznaczmy wierzchołki sześciokąta przez A, B, C, D, E, F . Skoro sześciokąt jest foremny, to

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA| = 2021$$

Oznaczmy przez $h_{AB}, h_{BC}, h_{CD}, h_{DE}, h_{EF}, h_{FA}$ odległości punktu X od odcinków AB, BC, CD, DE, EF, FA odpowiednio. Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Wtedy

$$\begin{aligned} [ABCDEF] &= [ABX] + [BCX] + [CDX] + [DEX] + [EFX] + [FAX] = \\ &= \frac{1}{2}|AB| \cdot h_{AB} + \frac{1}{2}|BC| \cdot h_{BC} + \frac{1}{2}|CD| \cdot h_{CD} + \frac{1}{2}|DE| \cdot h_{DE} + \frac{1}{2}|EF| \cdot h_{EF} + \frac{1}{2}|FA| \cdot h_{FA} \\ &= \frac{2012}{2} (h_{AB} + h_{BC} + h_{CD} + h_{DE} + h_{EF} + h_{FA}). \end{aligned}$$

Sześciokąt $ABCDEF$ można rozbić na sześć trójkątów równobocznych o boku 2012, więc $[ABCDEF] = 6 \cdot \frac{2012^2 \sqrt{3}}{4}$. Z porównania tych dwóch wzorów wynika, że

$$h_{AB} + h_{BC} + h_{CD} + h_{DE} + h_{EF} + h_{FA} = 6 \cdot \frac{2012 \sqrt{3}}{2} = 6063 \sqrt{3}.$$

4. Prostokątny stół bilardowy ma wymiary $m \times n$, gdzie m, n są parzystymi liczbami naturalnymi. Z jego środka wypuszczono bilę pod kątem 30° względem jednego boku stołu. Wykaż, że niemożliwe jest, że po pewnej liczbie odbić bila trafi do rogu stołu.

Rozwiązanie.

Nazwijmy bok, do którego tor bili jest pod kątem 30° *poziomym*, zaś prostopadły bok nazwijmy *pionowym*. Zauważmy, że przez cały czas swojego ruchu bila znajduje się pod kątem 30° lub -30° do boku poziomego.

Założmy, że bila wpadnie do rogu stołu po tym, jak jej łączna droga w pionie wyniesie x . Wtedy jej łączna droga w poziomie wyniesie $x \cdot \operatorname{ctg}(30^\circ) = x\sqrt{3}$, bowiem wszystkie odcinki były pokonywane pod kątem $\pm 30^\circ$. Z drugiej strony, środek stołu jest odległy od wierzchołka o $(m/2, n/2)$ lub $(n/2, m/2)$. Zatem obie liczby $x, x\sqrt{3}$ muszą być całkowite. Skoro $x = n/2$ lub $x = m/2$, to $x \neq 0$. Wobec tego $\sqrt{3} = (x\sqrt{3})/x$ jest liczbą wymierną, co jest absurdem.