

IV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Klasy drugie - rozwiązania

1. Moneta prawdziwa waży 10 g, a fałszywa 9 g. Zbiór 2013 monet jest taki, że po wyjęciu z niego dowolnej monety pozostałe można podzielić na dwa stosy o równych wagach. Ile może być w tym zbiorze monet fałszywych?

Rozwiązanie.

Niech S oznacza wagę wszystkich monet, zaś a oznacza wagę wybranej monety ze zbioru. Monety po wyłączeniu wybranej można podzielić na dwa stosy o równych wagach, więc ich łączna waga jest parzysta, czyli $S - a$ jest liczbą parzystą.

Jeżeli S jest nieparzyste, wynika stąd, że a jest nieparzyste, czyli każda wybrana moneta była fałszywa, więc wszystkie monety są fałszywe. Jeżeli zaś S było parzyste, to każda wybrana moneta była prawdziwa, więc w zbiorze nie ma monet fałszywych.

Zbiór wszystkich monet prawdziwych oraz zbiór wszystkich monet fałszywych spełnia założenia zadania, więc monet fałszywych mogło być 0 lub 2013.

Uwaga: W jednym miejscu rozwiązania ważne jest, że monet jest 2013 (a konkretniej, że monet jest nieparzysta liczba). Gdyby monet było parzystą wielokrotność 2013, to zbiór wszystkich monet fałszywych nie spełniałby założeń zadania i poprawną odpowiedzią byłoby "w zbiorze nie ma monet fałszywych".

2. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami wielomianu $x^2 - 15x + 3$. Udowodnić, że $x_1^{2012} + x_2^{2012}$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 3^{1006} .

Rozwiązanie.

Zauważmy, że zachodzi tożsamość:

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1x_2(x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

Ze wzorów Viète'a wynika że $x_1 + x_2 = 15$ oraz $x_1x_2 = 3$. Przyjmując $a_n = x_1^n + x_2^n$ mamy zależność:

$$a_n = 15a_{n-1} + 3a_{n-2} = 3(5a_{n-1} + a_{n-2}), \quad (1)$$

przy czym $a_1 = 15$, $a_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 15^2 - 6 = 219$. Liczby a_1 i a_2 są zatem całkowite i podzielne przez 3.

Zauważmy, że jeśli $n \geq 3$ i liczby a_{n-1} i a_{n-2} są całkowite i podzielne przez 3^k dla pewnego $k \geq 1$ to ze wzoru (1) wynika, że a_n jest całkowita i podzielna przez 3^{k+1} . Również kolejna liczba $a_{n+1} = 3(5a_n + a_{n-1})$ jest z tych samych powodów całkowita i podzielna przez 3^{k+1} . Tak więc liczby w kolejnych parach

$$(a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6), \dots, (a_{2011}, a_{2012})$$

są całkowite i podzielne odpowiednio przez $3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{1006}$.

3. Trójkąt ABC jest ostrokatny. Punkt A' jest symetryczny do A względem środka boku BC , a punkt B' jest symetryczny do B względem środka boku AC . Odcinek AB' przecina okrąg opisany na $\triangle ABC$ w punkcie D ($D \neq A$). Udowodnić, że odcinki $A'D$ i AD są prostopadłe.

Rozwiązanie.

Odcinek $A'C$ jest obrazem odcinka AB w symetrii względem środka boku BC , więc odcinki $A'C$ i AB są równej długości i równoległe, stąd $A' CAB$ jest równoległobokiem.

Analogicznie dowodzimy, że $B' CBA$ jest równoległobokiem. Wynika stąd, że $B'C = CA' = AB$ oraz $A'C \parallel B'C$, więc C jest środkiem odcinka $A'B'$.

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc jest równoramienny, zatem $AB = CD$ bo są to ramiona tego trapezu. Łącznie

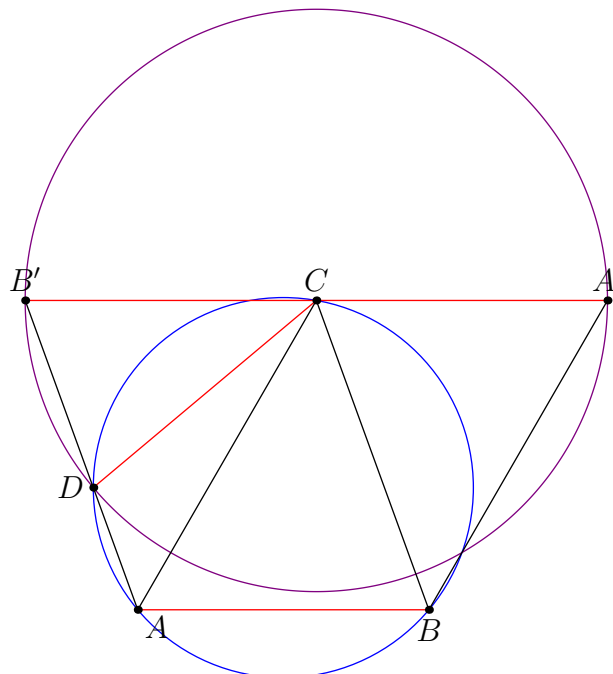
$$CD = CA' = CB'.$$

Wynika stąd, że $\sphericalangle CB'D = \sphericalangle CDB'$ i $\sphericalangle CDA' = \sphericalangle CA'D$. Suma kątów w trójkącie $\triangle A'B'D$ wynosi więc $2 \cdot (\sphericalangle B'DC + \sphericalangle A'DC)$, więc $\frac{1}{2} \cdot 180^\circ = \sphericalangle B'DC + \sphericalangle A'DC = \sphericalangle A'DB' = \sphericalangle A'DA$.

II rozwiązanie, bardzo teoretyczne

Niech C' oznacza odbicie punktu C względem środka boku AB . Niech D' oznacza rzut punktu A' na odcinek $B'C'$.

Punkty A, B, C są środkami boków trójkąta $\triangle A'B'C'$ a punkt D' jest spodkiem wysokości w tym trójkącie, więc z twierdzenia o okręgu dziewięciu punktów stwierdzamy, że punkty te leżą na jednym okręgu. Znaczący to, że punkt D' leży na okręgu opisanym na $\triangle ABC$, a że leży on również na prostej AB' to jest punktem przecięcia $B'A$ z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$, czyli $D' = D$. W szczególności $\sphericalangle A'DA = 90^\circ$.



4. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian $F(x)$ o współczynnikach rzeczywistych taki, że $F(1) = 1$ oraz

$$F(2n) = 2F(n) + n^2$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej n .

Rozwiązanie.

Stosując wielokrotnie zależność $F(2n) = 2F(n) + n^2$ dla liczb postaci $n = 2^m$ otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}
F(2^m) &= 2F(2^{m-1}) + (2^{m-1})^2 = 2[2F(2^{m-2}) + (2^{m-2})^2] + 2^{2m-2} \\
&= 2^2F(2^{m-2}) + 2^{2m-3} + 2^{2m-2} = 2^2[2F(2^{m-3}) + (2^{m-3})^2] + 2^{2m-3} + 2^{2m-2} \\
&= 2^3F(2^{m-3}) + 2^{2m-4} + 2^{2m-3} + 2^{2m-2} = \dots \\
&= 2^mF(1) + 2^{m-1} + 2^m + \dots + 2^{2m-4} + 2^{2m-3} + 2^{2m-2} \\
&= 2^m + 2^{m-1}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1}) = 2^m + 2^{m-1}(2^m - 1) \\
&= 2^{2m-1} + 2^{m-1} = \frac{1}{2}(2^{2m} + 2^m) = \frac{1}{2} \cdot 2^m(2^m + 1).
\end{aligned}$$

Rozważmy teraz wielomian $F_0(x) = \frac{1}{2} \cdot x(x+1)$. Zauważmy, że $F_0(1) = 1$ oraz

$$F_0(2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(2x+1) = 2x^2 + x = 2F_0(x) + x^2.$$

Wielomian $F_0(x)$ spełnia zatem warunki zadania. Udowodnimy, że jest to jedyny wielomian o żądanych własnościach.

Niech $F(x)$ będzie wielomianem takim, że $F(1) = 1$ i $F(2n) = 2F(n) + n^2$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n . Z powyższych rachunków wynika, że jeśli $n \geq 1$, to $F(2^n) = F_0(2^n)$. Liczby $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ są więc pierwiastkami wielomianu $G(x) = F(x) - F_0(x)$. Ponieważ jednak liczba pierwiastków niezerowego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych nie przekracza jego stopnia, $G(x)$ jest wielomianem zerowym. Ostatecznie jedynym wielomianem spełniającym warunki zadania jest $F_0(x) = \frac{1}{2} \cdot x(x+1)$.

[pg, jj]