



III Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy drugie - rozwiązania

28 maja 2011 r.

1. Udowodnić, że w trapezie środki równoległych podstaw, punkt przecięcia przekątnych oraz punkt przecięcia nierównoległych ramion leżą na jednej prostej.

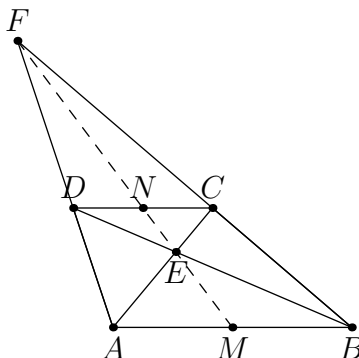
Rozwiązanie.

Niech A, B, C, D będą wierzchołkami trapezu, a E, F będą punktami przecięcia przekątnych oraz przedłużeń boków odpowiednio.

Proste CD i AB są równoległe, więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $\triangle CDE \simeq \triangle ABE$.

Niech M, N będą środkami boków AB, CD . Odcinki EN, EM są środkowymi w $\triangle CDE, \triangle ABE$, skoro są to trójkąty podobne, to $\sphericalangle NED = \sphericalangle MEB$, czyli N, E, M są współliniowe.

Analogicznie dowodzimy, że $\triangle CDF \simeq \triangle BAF$, więc kąty $\sphericalangle DFN, \sphericalangle AFM$ są równe, a stąd wynika, że F, N, M leżą na jednej prostej.



2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $2f(x+2) + f(-x-1) = x^2 + 4x + 4$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie.

Chcemy najpierw dowieść, że dla każdego $y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$2f(y) + f(-y+1) = y^2$$

Weźmy dowolne $y \in \mathbb{R}$, niech $x = y - 2$. Podstawiając to do równania z zadania obliczamy $2f(y) + f(-y+1) = y^2$, czyli dokładnie to, czego mieliśmy dowieść.

W równaniu $2f(y) + f(-y+1) = y^2$ podstawmy $-y+1$ za y . Uzyskujemy

$$2f(-y+1) + f(-(-y+1)+1) = (-y+1)^2 \text{ upraszczając } 2f(-y+1) + f(y) = (-y+1)^2$$

Otrzymaliśmy w tym miejscu układ dwóch równań liniowych o niewiadomych $f(y)$ i $f(-y+1)$.

Dodajmy do siebie równania $(-2)(2f(y) + f(-y+1)) = (-2)y^2$ oraz $2f(-y+1) + f(y) = (-y+1)^2$. Otrzymujemy $-3f(y) = (-y+1)^2 - 2y^2$ zatem

$$f(y) = \frac{y^2 + 2y - 1}{3}$$

dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$. Jedyna funkcja, która może być rozwiązaniem, to $f(y) = \frac{y^2 + 2y - 1}{3}$. Bezpośrednio podstawiając do równania stwierdzamy, że ta funkcja faktycznie jest rozwiązaniem.

3. Danych jest dwanaście ciężarków o różnych wagach będących dodatnimi liczbami całkowitymi nie przekraczającymi 30. Udowodnić, że pewne dwa ciężarki ważą łącznie tyle co dwa inne ciężarki.

Rozwiązanie.

Dla skrótu będziemy mówić “ciężarek A ”, zamiast “ciężarek o wadze A ”. Nie prowadzi to do nieporozumień, gdyż różne ciężarki mają różne wagi.

Rozważmy dowolne dwa ciężarki A i B . Waga $A + B$ jest równa co najmniej 3 i co najwyżej $29 + 30$, zatem mamy $59 - 3 + 1 = 57$ różnych możliwych wag pary ciężarków.

Nieuporządkowanych par różnych ciężarków jest $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66 > 57$. Istnieją więc ciężarki A, B, C, D , takie, że $A + B = C + D$. Pozostaje uzasadnić, że A, B, C, D są różnymi ciężarkami.

Braliśmy pary różnych ciężarków, więc $A \neq B, C \neq D$. Jeżeli byłoby $B = C$ to $A + B = C + D = B + D$, a stąd $A = D$, czyli para A, B byłaby tą samą co C, D , sprzeczność. Tak więc $B \neq C$. Identyczne rozumowanie pokazuje, że $B \neq D, A \neq C$ oraz $A \neq D$, zatem A, B, C, D są czterema różnymi ciężarkami.

4. Wielomian $f(x) = x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \dots + a_1x + a_0$ ma 2011 różnych pierwiastków całkowitych. Dla dowolnej liczby całkowitej m liczba $f(m)$ jest podzielna przez 2011. Udowodnić, że suma pierwiastków wielomianu $f(x)$ jest podzielna przez 2011.

Rozwiązanie.

Niech $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ będą pierwiastkami $f(x)$. Z równości $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{2011}) = 0$ oraz twierdzenia Bézouta wynika, że

$$f(x) = Q(x)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{2011})$$

gdzie $Q(x)$ jest pewnym wielomianem. Porównując stopnie obu stron stwierdzamy, że $Q(x)$ ma stopień 0, czyli jest stały: $Q(x) = a$. Współczynnik przy x^{2011} z lewej strony równania wynosi 1, a z prawej a , więc $a = 1$ i ostatecznie

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{2011}).$$

Wynika stąd w szczególności, że f ma współczynniki całkowite.

Niech m będzie dowolną liczbą całkowitą. Liczba 2011 jest pierwsza, więc $2011 \mid f(m) = (m - x_1) \dots (m - x_{2011})$ implikuje $2011 \mid m - x_{j_m}$ dla pewnego j_m , czyli $x_{j_m} \equiv m \pmod{2011}$.

Liczba m była wybrana dowolnie, z powyższego rozumowania wynika więc, że w zbiorze $\{x_1, x_2, \dots, x_{2011}\}$ istnieją liczby $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{2010}}$ dające reszty $0, 1, 2, \dots, 2010$ z dzielenia przez 2011. Liczby $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{2010}}$ są parami różne i jest ich 2011, więc

$$\{x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_{2010}}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{2011}\}.$$

Teraz już prosto obliczyć

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = x_{j_0} + x_{j_1} + \dots + x_{j_{2010}} \equiv 0 + 1 + \dots + 2010 = 1005 \cdot 2011 \equiv 0 \pmod{2011}.$$