



II Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy drugie - rozwiązania

1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2 + 5b^2 + 4c^2 \geq 4b(a + c).$$

Dowód. Wszystkie poniższe nierówności są równoważne.

$$a^2 + 5b^2 + 4c^2 \geq 4b(a + c)$$

$$a^2 + 5b^2 + 4c^2 \geq 4ba + 4bc$$

$$(a^2 + 4b^2 - 4ba) + (b^2 - 4bc + 4c^2) \geq 0$$

$$(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 \geq 0$$

ostatnia nierówność jest prawdziwa, zatem prawdziwa jest i teza. □

2. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych (x, y) ma równanie

$$x^2 - xy - 2y^2 = p^2 ?$$

Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

Uzasadnimy, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ jest 6 rozwiązań.

Równanie z zadania możemy przekształcić następująco:

$$(x + y)(x - 2y) = x^2 - xy - 2y^2 = p^2$$

$$\begin{cases} x + y = k \\ x - 2y = \frac{p^2}{k} \end{cases}$$

gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą.

Interesują nas tylko rozwiązania w liczbach całkowitych x, y , a więc te rozwiązania, gdzie $\frac{p^2}{k}, k$ są liczbami całkowitymi, czyli k jest dzielnikiem całkowitym p^2 – jedną z sześciu liczb $1, p, p^2, -1, -p, -p^2$.

$$\begin{cases} x + y = k \\ x = \frac{1}{3} \left(2k + \frac{p^2}{k} \right) \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że jeśli x jest liczbą całkowitą to i y jest liczbą całkowitą. Sprawdźmy, że w każdym przypadku tak jest.

Podstawiamy kolejne wartości k i obliczamy kolejne wartości x :

k	1	p	p^2	-1	$-p$	$-p^2$
x	$\frac{2+p^2}{3}$	p	$\frac{2p^2+1}{3}$	$-\frac{2+p^2}{3}$	$-p$	$-\frac{2p^2+1}{3}$

Liczba p jest większa od 3 i pierwsza, a więc w szczególności p nie jest podzielna przez 3. Zatem p^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 3, co uzasadniamy przeliczając 2 możliwe przypadki $-p = 3k + 2$, $p = 3k + 1$:

$$(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \quad (3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

Skoro p^2 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, to $2p^2 + 1$ i $p^2 + 2$ dają “reszty” $2 + 1, 1 + 2$ przy dzieleniu przez 3, zatem są podzielne przez 3, a więc liczby

$$\frac{2+p^2}{3}, \frac{2p^2+1}{3}, -\frac{2+p^2}{3}, -\frac{2p^2+1}{3}$$

są całkowite, czyli dla wszystkich sześciu wartości k liczba $x = \frac{1}{3} \left(2k + \frac{p^2}{k} \right)$ jest całkowita i ostatecznie równanie z zadania ma sześć rozwiązań.

3. Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC , w którym $AC = BC$. Proste zawierające wysokości trójkąta opuszczone z wierzchołków A , B i C przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach E , F i G . Proste CE i BG przecinają się w punkcie K zaś proste CF i AG przecinają się w punkcie L . Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC należy do prostej KL .

Dowód.

Lemat 1. *Jeżeli H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego ABC , zaś E jest punktem przecięcia prostej AH z okręgiem opisanym na ABC , to*

$$\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCH$$

Dowód lematu. Niech S oznacza punkt przecięcia AH z bokiem BC . Prosta AH jest wysokością, zatem $\sphericalangle ASC = 90^\circ$.

Kąty $\sphericalangle BAE$ i $\sphericalangle BCE$ są równe jako oparte na tym samym łuku. Co więcej $\sphericalangle EAB = \sphericalangle SAB = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCH$. Zatem $\sphericalangle BCE = \sphericalangle EAB = \sphericalangle BCH$.

Uwaga: Podobny lemat zachodzi dla trójkątów rozwartokątnych. Zachęcamy czytelnika do sformułowania i udowodnienia go. □

Oznaczmy przez H punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC , a przez M środek boku AB .

Jeżeli udowodnimy, że $\sphericalangle KHG = 90^\circ$ to analogicznie $\sphericalangle LHG = 90^\circ$, zatem $\sphericalangle KHL = \sphericalangle KHG + \sphericalangle LHG = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, czyli te trzy punkty leżą na jednej prostej.

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc

$$\sphericalangle ACG = \sphericalangle BCG$$

Z lematu uzyskujemy równość kątów $\sphericalangle ECB = \sphericalangle GCB$ zatem w trójkącie GCK prosta BC jest dwusieczną.

Z równoramienności trójkąta ABC wynika w szczególności, że prosta CG jest średnicą okręgu opisanego na ABC , zatem $\sphericalangle GBC = 90^\circ$, czyli prosta BC jest w trójkącie GCK wysokością.

W trójkącie GCK wysokość i dwusieczna wypuszczone z wierzchołka C pokrywają się, zatem jest to trójkąt równoramienny, czyli

$$BG = BK$$

Z lematu wynika również równość $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABG$. Punkt H leży na odcinku BF a punkt M na odcinku AB , zatem

$$\sphericalangle MBH = \sphericalangle ABF = \sphericalangle ABG = \sphericalangle MBG$$

Trójkąty HMB , GMB są podobne na mocy cechy kąt-kąt-kąt i mają wspólny bok, zatem są przystające. W szczególności $HB = GB$.

Podsumowując: udowodniliśmy, że $HB = GB = BK$. Zatem punkt B , leżący w połowie odcinka KG , jest środkiem okręgu opisanego na GHK , czyli trójkąt GHK jest prostokątny: $\sphericalangle GHK = 90^\circ$, co w połączeniu z początkowymi uwagami kończy dowód. $\square$

4. Czy istnieje podzbiór V zbioru dodatnich liczb całkowitych składający się z przynajmniej dwóch liczb i taki, że dla dowolnych różnych liczb $a, b \in V$ liczby $\sqrt{a+b}$ i $\sqrt{a+2b}$ są całkowite? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

Udowodnimy, że taki podzbiór nie istnieje. Właściwe rozwiązanie poprzedzimy dla klarowności uwagami wstępnymi.

Stwierdzenie 2. Jeżeli liczby całkowite k, l są takie, że $3|k^2 + l^2$, to $3|k$ i $3|l$.

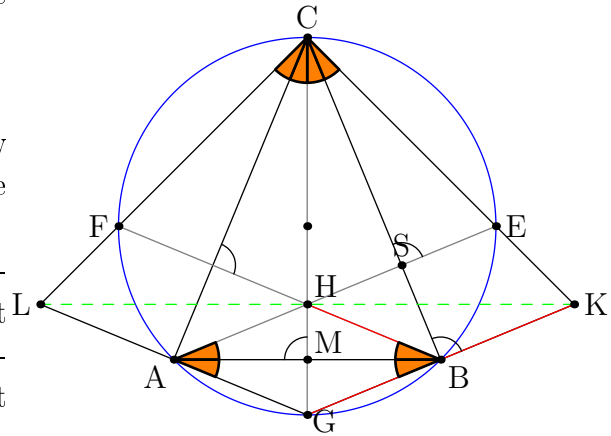
Dowód stwierdzenia. W rozwiązaniu zadania drugiego stwierdziliśmy, że kwadrat liczby całkowitej może dawać resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 3.

Suma dwóch kwadratów może więc dawać reszty:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 2$$

Wiemy, że $k^2 + l^2$ daje resztę 0, z powyższego wyliczenia wynika że $0 + 0$ to jedyny sposób otrzymania 0, więc również liczby k^2, l^2 dają resztę 0 z dzielenia przez 3:

$$3|k^2 \text{ i } 3|l^2$$



liczba 3 jest pierwsza, zatem

$$3|k \text{ i } 3|l$$

□

Stwierdzenie 3. *Równanie*

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z .

Dowód stwierdzenia. Załóżmy, że powyższe równanie ma rozwiązania. Rozważmy trójkę (x, y, z) taką, że z jest najmniejsze spośród wszystkich rozwiązań.

Skoro

$$x^2 + y^2 = 3z^2,$$

to $3|x^2 + y^2$. Stwierdzenie 2. mówi, że $3|x$ i $3|y$.

Podstawiając $x = 3x_2$, $y = 3y_2$, równanie przyjmuje postać

$$9x_2^2 + 9y_2^2 = 3z^2.$$

Wynika stąd, że $9|3z^2$, czyli $3|z$. Kładąc $z = 3z_2$, równanie przyjmuje postać

$$9x_2^2 + 9y_2^2 = 27z_2^2,$$

a więc

$$x_2^2 + y_2^2 = 3z_2^2$$

Trójka liczb x_2, y_2, z_2 spełnia równanie, ale $z_2 = z/3 < z$. Przeczy to założeniu, że w trójce liczb (x, y, z) z jest możliwie najmniejsze.

□

Założmy, że zbiór V spełnia warunki zadania i $x, y \in V$ są różnymi elementami zbioru. Skoro $x, y \in V$ to

$$\sqrt{x+y}, \sqrt{x+2y} \text{ są całkowite.}$$

Ale $y, x \in V$, zatem również $\sqrt{y+2x}$ jest całkowita.

Oznaczmy przez n, m, l liczby całkowite $\sqrt{x+y}, \sqrt{x+2y}, \sqrt{2x+y}$. Zachodzi równość

$$3n^2 = 3(x+y) = m^2 + l^2.$$

przy czym $n, m, l > 0$, gdyż V zawiera tylko liczby dodatnie.

Zatem (m, l, n) są liczbami całkowitymi spełniającymi równanie $m^2 + l^2 = 3n^2$, ale stwierdzenie 3. orzeka, że to równanie nie ma rozwiązań całkowitych dodatnich. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.