



Podlaski Konkurs Matematyczny - 2007

Klasy Drugie

Rozwiązania zadań konkursowych

26 maja 2007 r.

1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a , dla których wielomiany $f(x) = x^5 + ax^3 + x^2 + 1$ i $g(x) = x^4 + ax^2 + x + 1$ mają wspólny pierwiastek.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli x_0 jest wspólnym pierwiastkiem wielomianów $f(x)$ i $g(x)$, to x_0 jest również pierwiastkiem wielomianu

$$h(x) = f(x) - xg(x) = 1 - x.$$

Wynika stąd, że wspólnym pierwiastkiem rozważanych wielomianów może być tylko liczba $x_0 = 1$. Ponieważ $f(1) = g(1) = 3 + a$, otrzymujemy, że wielomiany $f(x)$ i $g(x)$ mają wspólny pierwiastek wtedy, gdy $a = -3$ i jest nim liczba $x_0 = 1$. □

2. Niech a i b będą ustalonymi liczbami naturalnymi i niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem określonym wzorem

$$x_n = an + b \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykazać, że albo żaden wyraz ciągu $\{x_n\}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej, albo w ciągu tym istnieje nieskończenie wiele wyrazów, które są kwadratami liczb naturalnych.

Rozwiązanie

Zauważmy, że rozważany ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy a . Przypuśćmy, że dla pewnej liczby naturalnej m , m -ty wyraz tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej k , tzn. $x_m = k^2$. Dla dowolnej liczby naturalnej l mamy $x_{m+l} = x_m + la = k^2 + la$. Z drugiej strony, ponieważ

$$(k+a)^2 = k^2 + 2ka + a^2 = k^2 + (2k+a)a$$

widzimy, że przyjmując $l = 2k + a$ otrzymamy $x_{m+2k+a} = (k+a)^2$. Stąd wynika, że jeśli liczba k^2 jest wyrazem ciągu $\{x_n\}$, to również liczby

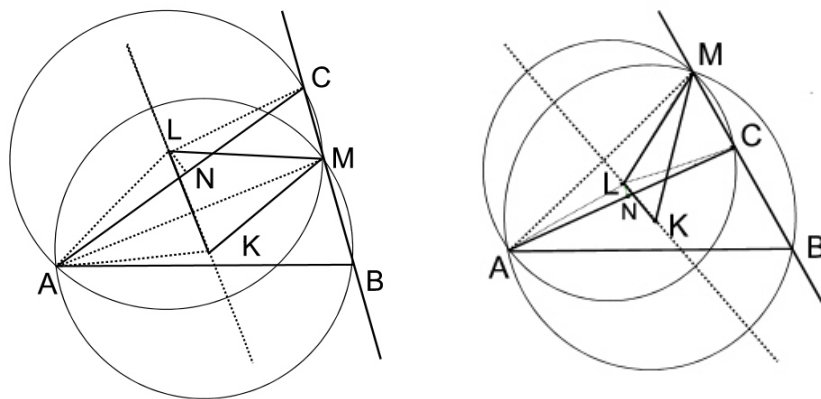
$$(k+a)^2, (k+2a)^2, (k+3a)^2, (k+4a)^2, \dots$$

są wyrazami ciągu $\{x_n\}$. □

3. Na prostej ℓ , w której zawarty jest bok BC trójkąta ABC , wybrano punkt M różny od B i C . Punkty K i L są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABM i AMC . Wykazać, że pole trójkąta KLM jest nie mniejsze niż jedna czwarta pola trójkąta ABC . Przy jakim położeniu punktu M trójkąt KLM ma najmniejsze pole?

Rozwiązanie

Punkt M może leżeć na boku BC lub poza nim (rysunki poniżej). W obu przypadkach rozumowanie jest podobne.



W przypadku, gdy M należy do boku BC kąty $\angle ALM$ i $\angle ACM$ są odpowiednio kątami środkowym i wpisanym okręgu opisanego na trójkącie AMC opartymi na tym samym łuku, więc $\angle ALM = 2\angle ACB$. Ponieważ punkty K, L należą do symetralnej odcinka AM , $\angle KLM = \frac{1}{2}\angle ALM = \angle ACB$. Podobnie stwierdzamy, że $\angle LKM = \angle ABC$. W przypadku, gdy M leży poza bokiem BC , kąt $\angle ACM$ jest równy połowie kąta środkowego $\angle ALM$ opartego na łuku AM nie zawierającym punktu C , a więc połowie kąta $360^\circ - \angle ALM$. Stąd wynika, że $\angle ACB = \angle KLM$.

Trójkąty KLM i ABC są zatem podobne. Wystarczy wykazać, że skala podobieństwa jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}$. W tym celu oznaczmy przez N rzut prostopadły punktu L na bok AC . Punkt N jest oczywiście środkiem boku AC . W trójkącie prostokątnym LNC przeciwprostokątną jest LC , więc $LC \geq NC$. Ponieważ $LC = LM$, więc $LM \geq \frac{1}{2}AC$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $L = N$, czyli w przypadku, gdy AC jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie AMC . Ma to oczywiście miejsce wtedy, gdy M jest spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A .

□

4. Dla danej liczby naturalnej $n > 1$, niech $f(n)$ oznacza liczbę wszystkich par liczb naturalnych (x, y) spełniających równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

Wykazać, że $f(n) \geq 3$ oraz wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których $f(n) = 3$.

Rozwiązanie

Ponieważ x, y, n są liczbami naturalnymi, rozważane równanie można przekształcić do postaci $nx + ny = xy$, a następnie do postaci iloczynowej:

$$(x - n)(y - n) = n^2.$$

Tak więc każde rozwiązanie (x, y) wyznacza rozkład liczby n^2 na iloczyn dwóch czynników. Odwrotnie, jeśli $n^2 = a \cdot b$ jest rozkładem liczby n^2 na iloczyn dwóch czynników, to z postaci iloczynowej naszego równania wynika, że wystarczy przyjąć $x = n + a$, $y = n + b$. Tak więc liczba $f(n)$ jest równa liczbie wszystkich naturalnych dzielników liczby n^2 . Dla $n > 1$, liczba n^2 ma przynajmniej trzy różne dzielniki: 1, n i n^2 , a więc $f(n) \geq 3$. Innymi słowy, dla dowolnej liczby $n > 1$ mamy trzy pary $(n + 1, n + n^2)$, $(2n, 2n)$, $(n + n^2, n + 1)$ stanowiące rozwiązania równania. Jeśli n nie jest liczbą pierwszą, to n^2 ma więcej niż 3 różne dzielniki i wówczas $f(n) > 3$. Ostatecznie $f(n) = 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

□