



III Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy pierwsze - rozwiązania

28 maja 2011 r.

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, y takie, że $4x + (x + 1)^2 = y^2$.

Rozwiązanie.

Zachodzi $y^2 = 4x + (x + 1)^2 = x^2 + 6x + 1 = (x + 3)^2 - 8$. Wynika stąd:

1. $|x + 3|^2 \geq 8$, a więc $|x + 3| \geq 2\sqrt{2}$, a że x jest całkowite, to $|x + 3| \geq 3$,
2. y^2 i $(x + 3)^2$ są tej samej parzystości, a więc y i $|x + 3|$ są tej samej parzystości,
3. $|y| < |x + 3|$, czyli, korzystając z poprzedniej uwagi, $|y| \leq |x + 3| - 2$.

Jeżeli $|x + 3| \geq 4$, to $8 = (x + 3)^2 - y^2 \geq (x + 3)^2 - (|x + 3| - 2)^2 = 4|x + 3| - 4 \geq 12$, czyli otrzymujemy sprzeczność.

Tak więc $|x + 3| = 3$ i $y^2 = 1$. Możliwe rozwiązania to pary (x, y) równe

$$(-6, -1), (-6, 1), (0, -1), (0, 1).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że pary te spełniają równanie z zadania.

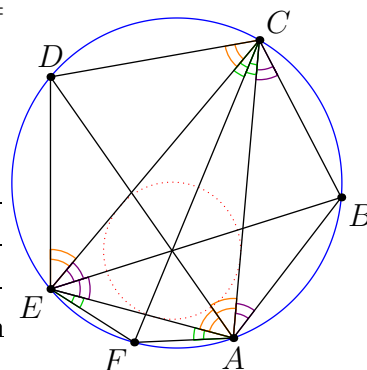
2. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wpisanym w okrąg zachodzą równości: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Udowodnić, że przekątne AD , BE , CF tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.

Trójkąt $\triangle ABC$ jest równoramienny, więc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$. Kąty opisane na łukach są równe, więc

$$\sphericalangle BEC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BEA.$$

Prosta BE zawiera więc dwusieczną kąta $\sphericalangle AEC$. Analogicznie dowodzimy, że proste AD , CF zawierają dwusieczne kątów $\sphericalangle EAC$, $\sphericalangle ACE$ odpowiednio, więc wszystkie trzy proste przechodzą przez punkt przecięcia tych dwusiecznych — środek okręgu wpisanego w $\triangle ACE$.



3. W pola kwadratowej tablicy 2011×2011 wpisano liczby całkowite. Suma wpisanych liczb jest parzysta. Wykazać, że kolumny tej tablicy można tak poprzerzyc, że suma liczb stojących na przekątnej (od lewego dolnego wierzchołka do prawego górnego wierzchołka) jest parzysta.

Sposób I

Numerujemy wiersze i kolumny rozpoczynając od dolnego rzędu (patrz rys.).

Oznaczamy liczbę stojącą w polu na przecięciu i -tego wiersza i j -kolumny jako A_{ij} . k -shiftem nazwiemy przesawienie kolumn polegające na tym, że i -ta kolumna przechodzi na kolumnę $i + k$ -tą, przy czym ustalamy, że $n + 1$ kolumna to 1 kolumna, $n + 2$ kolumna to druga kolumna itd.

Oznaczamy jako S_k sumę liczb na przekątnej po k -shiftcie.

Zauważmy, że A_{ij} znajdzie się na przekątnej po k -shiftcie, wtedy i tylko wtedy, gdy $i \equiv j + k \pmod{n}$ (na rysunku liczba wpisana w pole oznacza, przy którym shiftcie leżała ona na przekątnej, przykładowo $(1, 2)$ w 6-shiftcie przechodzi na $(1, 8)$, czyli $(1, 1)$).

Rozważmy 0-shift, 1-shift, ..., 2010-shift i $S := S_0 + S_1 + \dots + S_{2010}$. Na mocy poprzedniej uwagi każda liczba wpisana w tablicę pojawia się w sumie S dokładnie raz, więc S jest sumą liczb na wpisanych w tablicę, zatem $2 \mid S$.

Załóżmy, że $2 \nmid S_0, 2 \nmid S_1, \dots, 2 \nmid S_{2010}$. Wtedy S jest sumą 2011 liczb nieparzystych, jest więc nieparzysta, co daje sprzeczność.

II sposób, oparty na idei Pauliny Pietrzyk

Numerujemy wiersze i kolumny rozpoczynając od dolnego rzędu. Oznaczamy liczbę stojącą w polu na przecięciu i -tego wiersza i j -kolumny jako A_{ij} .

Jeżeli istnieją takie kolumny i i j , że zamiana kolumny i i kolumny j zmienia parzystość to ewentualnie zamieniając te kolumny doprowadzimy do sytuacji, gdy suma liczb na przekątnej jest parzysta.

Załóżmy, więc, że zamiana dowolnych różnych kolumn i i j nie zmienia parzystości przekątnej. Przy zamianie kolumn z przekątnej usuwamy liczby A_{ii} i A_{jj} a dostawiamy A_{ij} oraz A_{ji} . Jeżeli parzystość się nie zmienia to

$$2 \mid A_{ii} + A_{jj} - A_{ij} - A_{ji}.$$

Sumujemy takie podzielności dla wszystkich $i < j$:

$$2 \mid \sum_{i=1}^{2011} \sum_{j=i+1}^{2011} A_{ii} + A_{jj} - A_{ij} - A_{ji}$$

W sumie po prawej stronie każde A_{ij} takie, że $i \neq j$ wystąpi dokładnie raz, ze znakiem -1 , a każde A_{kk} wystąpi:

1. jako składnik A_{ii} gdy $i = k$ i $j > k$, czyli $2011 - k$ razy,
2. jako składnik A_{jj} gdy $i < k$ i $j = k$, czyli $k - 1$ razy

Łącznie więc A_{kk} wystąpi $2011 - k + (k - 1) = 2010$ razy. Reasumując

$$2 \mid \sum_{i=1}^{2011} \sum_{j=i+1}^{2011} A_{ii} + A_{jj} - A_{ij} - A_{ji} = - \sum_{i \neq j, 1 \leq i, j \leq 2011} A_{ij} + 2010 \sum_{i=1}^{2011} A_{ii} = - \sum_{i=1}^{2011} \sum_{j=1}^{2011} A_{ij} + 2011 \sum_{i=1}^{2011} A_{ii}$$

7	6	5	4	3	2	1	0
6	5	4	3	2	1	0	6
5	4	3	2	1	0	6	5
4	3	2	1	0	6	5	4
3	2	1	0	6	5	4	3
2	1	0	6	5	4	3	2
1	0	6	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	6	7

Pierwsza z tych sum jest sumą liczb w tablicy pomnożoną przez -1 , więc jest parzysta z założeń zadania. Parzysta musi być więc druga z sum a to jest suma liczb na przekątnej bez przestawień kolumn. W tym przypadku dowolne przestawienie kolumn dowodzi tezy zadania.

4. Liczby całkowite a, b spełniają nierówności

$$b > a^3 \text{ oraz } a + 1 > (b - 1)^2.$$

Jakie wartości może przyjąć różnica $b - a$? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

Niech (a, b) będzie parą liczb spełniających nierówności. Zachodzi $a + 1 > (b - 1)^2 \geq 0$, czyli $a \geq 0$, stąd $b > 0$.

Jeżeli $a \geq 2$, to $a^3 \geq 4a \geq a + 2$, zatem $(b - 1)^2 \geq (a^3 - 1)^2 \geq (a + 1)^2 > a + 1$, sprzeczność.

Pozostają dwa przypadki: $a = 0$, i $a = 1$.

Jeśli $a = 0$, to $b > 0$ i $1 > (b - 1)^2$, czyli $b - 1 = 0$, $b = 1$.

Jeśli $a = 1$, to $b > 1$, ale $2 > (b - 1)^2$, zatem $b - 1 = 1$, $b = 2$.

W obu powyższych przypadkach $b - a$ przyjmuje wartość 1, jest to jedyna możliwa wartość.

Rozwiązania można było również znaleźć metodą geometryczną, patrz rysunek.

