



Podlaski Konkurs Matematyczny - 2007

Klasy Pierwsze

Rozwiązania zadań konkursowych

26 maja 2007 r.

1. Wykazać, że jeśli x i y są liczbami całkowitymi, to liczba

$$xy^5 - x^5y$$

jest podzielna przez 30.

Rozwiązanie

Wystarczy wykazać podzielność liczby $xy^5 - x^5y = xy(x^4 - y^4)$ przez liczby pierwsze: 2, 3 i 5. Dla ustalonej liczby $p \in \{2, 3, 5\}$, udowodnimy, że jeśli p nie jest dzielnikiem żadnej z liczb x i y , to jest dzielnikiem liczby $x^4 - y^4$. Wykażemy nieco więcej, że jeśli p nie jest dzielnikiem liczby x , to x^4 przy dzieleniu przez p daje resztę 1. Z tożsamości

$$(pk + r)^4 = p^4k^4 + 4p^3k^3r + 6p^2k^2r^2 + 4pk^3r^3 + r^4$$

wynika, że czwarta potęga liczby $pk + r$ przy dzieleniu przez p daje resztę równą reszcie z dzielenia przez p liczby r^4 . Dla $p = 2$ powyższe stwierdzenie jest oczywiste bo $1^4 = 1$. Dla $p = 3$ mamy $1^4 = 1$ i $2^4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$. Wreszcie dla $p = 5$ mamy: $1^4 = 1$, $2^4 = 16 = 5 \cdot 3 + 1$, $3^4 = 81 = 5 \cdot 16 + 1$ i $4^4 = 256 = 5 \cdot 51 + 1$

Widzimy teraz, że jeśli żadna z liczb x i y nie jest podzielna przez p , to ich czwarte potęgi dają przy dzieleniu przez p takie same reszty (równe 1), a więc p jest dzielnikiem liczby $x^4 - y^4$.

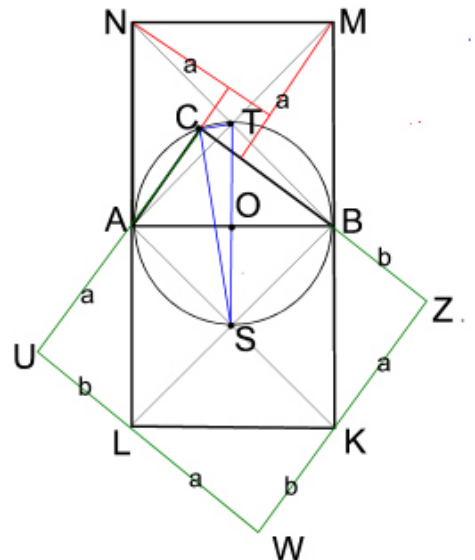
□

2. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano dwa kwadraty $ABKL$ i $ABMN$, przy czym kwadrat $ABKL$ nie ma wspólnych punktów wewnętrznych z trójkątem ABC , zaś kwadrat $ABMN$ zawiera trójkąt ABC . Niech S , T będą środkami tych kwadratów (tzn. punktami przecięcia ich przekątnych). Wykazać, że trójkąt SCT jest prostokątny i wyznaczyć długości jego boków wiedząc, że $|BC| = a$, $|AC| = b$ oraz $a > b$.

Rozwiązanie

Opiszmy okrąg o na trójkącie ABC . Jego środek O jest środkiem przeciwprostokątnej AB , a promień ma długość $c/2$, gdzie $c = |AB|$. Ponieważ $|OS| = |OT| = c/2$, punkty S i T też leżą na okręgu o i są końcami jego średnicy. Kąt $\angle TCS$ jest zatem prosty.

Aby wyznaczyć $|CS|$ doklejmy trzy trójkąty prostokątne AUL , LWK i KZB , każdy przystający do trójkąta ABC (por. rysunek obok). Z łatwością zauważamy, że $CUWZ$ jest kwadratem o boku długości $a + b$, zaś S jest jego środkiem. Oznacza to, że CS ma długość równą połowie długości jego przekątnej, czyli $(a + b)\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ponieważ $ST = c = \sqrt{a^2 + b^2}$, więc z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|CT|^2 = a^2 + b^2 - (a + b)^2/2 = (a - b)^2/2$. Ostatecznie: $|CS| = (a + b)\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|CT| = (a - b)\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|ST| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



□

3. Na okręgu rozmieszczamy liczby według następującej zasady. W pierwszym kroku wpisujemy liczby 1 i 2 tak aby leżały naprzeciw siebie (tzn. na końcach pewnej średnicy). W drugim kroku, na środku pomiędzy każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich sumę (zatem po dwóch krokach w czterech punktach okręgu będą wpisane liczby 1, 3, 2, 3). Czynność tę kontynuujemy, tzn. w k -tym kroku na środku pomiędzy każdymi dwiema sąsiednimi liczbami, wpisanymi we wcześniejszych $k - 1$ krokach, wpisujemy ich sumę. Wyznaczyć sumę wszystkich liczb rozmieszczonych na okręgu po wykonaniu n kroków. Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie

Niech S_n oznacza sumę wszystkich liczb rozmieszczonych na okręgu po wykonaniu n kroków. Oczywiście $S_1 = 3$ oraz $S_2 = S_1 + 2 \cdot (1 + 2) = 9$. Niech teraz $k \geq 2$. Ustalimy zależność między S_{k+1} i S_k . Rozważmy dowolną liczbę a oraz dwie sąsiadujące z nią liczby x i y , rozmieszczone na okręgu po wykonaniu k kroków. W $k + 1$ kroku na okręgu między x i a wpisujemy $x + a$, między a i y wpisujemy $a + y$. Oznacza to, że każda liczba rozmieszczona na okręgu w pierwszych k krokach jest składnikiem dokładnie dwóch liczb dopisywanych w $k + 1$ kroku. Tak więc $S_{k+1} = S_k + 2S_k = 3S_k$, czyli

$$S_n = 3S_{n-1} = 3^2S_{n-2} = \dots = 3^{n-1}S_1 = 3^n.$$

Ostatecznie $S_n = 3^n$.

□

4. Wewnątrz prostokąta $ABCD$ wybrano dowolny punkt X . Niech K , L , M i N oznaczają kolejno rzuty prostokątne punktu X na boki AB , BC , CD i DA . Wykazać, że przynajmniej jeden z prostokątów $AKXN$ lub $CMXL$ ma pole nie większe niż jedna czwarta pola prostokąta $ABCD$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $|AB| = 2a$, $|BC| = 2b$. Niech S oznacza środek prostokąta $ABCD$. Teza zadania jest oczywista, gdy punkt X należy do jednego z prostokątów $AESH$ lub $SFCG$. Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy X należy do wnętrza jednego z prostokątów $HSGD$ lub $EBFS$. Załóżmy, że X należy do prostokąta $HSGD$. Oznaczmy przez x i y odległości X od boków SG i HS . Przy tych oznaczeniach suma pól prostokątów $AKXN$ i $CMXL$ jest równa

$$(a - x)(b + y) + (a + x)(b - y) = 2ab - 2xy \leq 2ab.$$

Stąd wynika, że przynajmniej jedno z tych pól jest nie większe niż ab , czyli nie większe niż jedna czwarta pola prostokąta $ABCD$. Przypadek, gdy X należy do prostokąta $EBFS$ jest analogiczny.

□

