



Podlaski Konkurs Matematyczny

Zadania konkursowe - klasy pierwsze

27 maja 2006 r.

1. Ścianami ośmiościanu foremego są trójkąty równoboczne o boku długości n . Każdą krawędź ośmiościanu dzielimy na n odcinków długości 1, a następnie prowadzimy wszystkie odcinki równoległe do krawędzi o końcach w punktach podziału. Odcinki te wraz z krawędziami ośmiościanu wyznaczają podział każdej ściany na trójkąty równoboczne o boku 1. Ile jest różnych punktów będących wierzchołkami tych trójkątów i ile jest wszystkich odcinków długości 1 będących bokami tych trójkątów. (Model ośmiościanu foremego można zbudować sklejając podstawami dwa przystające ostrosłupy o podstawach kwadratowych i ścianach bocznych będących trójkątami równobocznymi).

Rozwiązanie

Zauważmy, że na każdej ścianie ośmiościanu mamy n^2 trójkątów równobocznych o boku 1. Uzasadnić to można np. porównując pole ściany bocznej, które wynosi $\frac{n^2\sqrt{3}}{4}$ i pole trójkąta o boku 1, które wynosi $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Trójkąty o boku 1 pokrywają ścianę boczną, więc musi ich być n^2 . Na powierzchni bocznej ośmiościanu mamy więc $8n^2$ trójkątów równobocznych o boku 1. Mają one razem $24n^2$ boków, ale każdy bok należy do dokładnie dwóch trójkątów. Tak więc na powierzchni ośmiościanu mamy $\frac{1}{2} \cdot 24n^2 = 12n^2$ odcinków długości 1, będących bokami trójkątów równobocznych.

Zauważmy, że $8n^2$ trójkątów o boku 1 ma razem $24n^2$ wierzchołków, przy czym każdy z 6 wierzchołków będących wierzchołkami ośmiościanu należy do dokładnie czterech trójkątów o boku 1, a każdy z pozostałych należy do dokładnie sześciu trójkątów o boku 1. Tych pozostałych jest zatem

$$\frac{24n^2 - 6 \cdot 4}{6} = 4n^2 - 4.$$

Łącznie z wierzchołkami ośmiościanu mamy więc $4n^2 + 2$ punktów będących wierzchołkami trójkątów o boku 1. $\square$

2. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Rozwiązanie

Liczby x, y, z są dodatnie, więc rozważana nierówność jest równoważna następującej:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

Ostatnią nierówność możemy napisać w postaci

$$\frac{1}{2}x^2(y^2 - 2yz + z^2) + \frac{1}{2}y^2(x^2 - 2xz + z^2) + \frac{1}{2}z^2(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0,$$

czyli

$$\frac{1}{2}x^2(y - z)^2 + \frac{1}{2}y^2(x - z)^2 + \frac{1}{2}z^2(x - y)^2 \geq 0.$$

Powyższa nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z , a nierówność rozważana w zadaniu jest jej konsekwencją. $\square$

3. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ taki, że przekątne AD , BE oraz CF przecinają się w jednym punkcie O . Niech S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 i S_6 będą kolejno polami trójkątów AOB , BOC , COD , DOE , EOF i FOA . Udowodnić, że $S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6$.

Rozwiązanie

Niech $AO = a, BO = b, CO = c, DO = d, EO = e, FO = f$ oraz $\angle AOB = \angle DOE = \alpha$, $\angle BOC = \angle EOF = \beta$ oraz $\angle COD = \angle FOA = \gamma$. Mamy więc: $S_1 = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$, $S_2 = \frac{1}{2}bc \sin \beta$, $S_3 = \frac{1}{2}cd \sin \gamma$, $S_4 = \frac{1}{2}de \sin \alpha$, $S_5 = \frac{1}{2}ef \sin \beta$, $S_6 = \frac{1}{2}fa \sin \gamma$. Stąd wynika, że

$$S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = \frac{1}{8}abcde f \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

oraz

$$S_2 \cdot S_4 \cdot S_6 = \frac{1}{8}abcde f \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Ostatecznie $S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6$. $\square$

4. W trójkącie ABC długości wszystkich trzech wysokości są całkowitymi wielokrotnościami promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że ABC jest trójkątem równobocznym.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez a, b, c długości boków trójkąta ABC , przez h_a, h_b, h_c długości odpowiednich wysokości, przez r promień okręgu wpisanego oraz S niech będzie polem rozważanego trójkąta. Mamy

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c = r(a + b + c).$$

Z założenia istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z takie, że

$$h_a = xr, \quad h_b = yr \quad \text{oraz} \quad h_c = zr.$$

Uwzględniając to w powyższych równościach otrzymujemy:

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2S}{\frac{2S}{xr} + \frac{2S}{yr} + \frac{2S}{zr}} = \frac{r}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}},$$

czyli

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Ponieważ średnica okręgu wpisanego w trójkąt jest krótsza od każdej jego wysokości, więc liczby x, y, z są nie mniejsze od 3. Z łatwością zauważamy, że w takiej sytuacji równość $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ może zajść tylko dla $x = y = z = 3$. Stąd wnosimy, że $h_a = h_b = h_c$ oraz $a = b = c$. $\square$