



Podlaski Konkurs Matematyczny - 2005
Klasy pierwsze

Rozwiązania zadań konkursowych

14 maja 2005 r.

1. Wyznaczyć wszystkie takie ciągi (x, y, z) trzech liczb rzeczywistych, że każdy wyraz ciągu jest równy kwadratowi różnicy dwóch pozostałych wyrazów.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli ciąg (x, y, z) spełnia warunki zadania, to te warunki spełniają również wszystkie ciągi powstałe z (x, y, z) przez dowolne przestawienie wyrazów. Wystarczy zatem wyznaczyć takie ciągi, że $x \leq y \leq z$. Z założeń wynika, że poszukiwane liczby x, y, z muszą być nieujemne. Mamy również

$$y = (x - z)^2 \quad \text{ i } \quad z = (x - y)^2,$$

czyli $z - y = (x - y)^2 - (x - z)^2 = (z - y)(2x - y - z)$. Tak więc

$$(z - y)(2x - y - z - 1) = 0.$$

Z założeń wynika, że $2x - y - z - 1 \leq -1$, a więc $y = z$ oraz $x = (y - z)^2 = 0$. Z powyższych równości wnosimy także, że $z = y^2$ i $y = z^2$. Tak więc $y = y^2$, $z = z^2$, a w konsekwencji $y = z = 0$ lub $y = z = 1$. Ostatecznie warunki zadania spełniają cztery ciągi: $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ i $(1, 1, 0)$. $\square$

2. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n część całkowita liczby

$$\frac{n^2 + n}{3}$$

jest parzysta.

Rozwiązanie

Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Liczbę n można jednoznacznie przedstawić w postaci $n = 3m + r$, gdzie m jest liczbą całkowitą, zaś $r \in \{0, 1, 2\}$. Mamy więc

$$\begin{aligned} \left[\frac{n^2 + n}{3} \right] &= \left[\frac{(3m + r)^2 + (3m + r)}{3} \right] = \left[\frac{9m^2 + 6mr + 3m + r^2 + r}{3} \right] \\ &= \left[3m^2 + 2mr + m + \frac{r^2 + r}{3} \right], \end{aligned}$$

czyli

$$\left[\frac{n^2 + n}{3} \right] = \begin{cases} 3m^2 + 2mr + m, & \text{jeśli } r \in \{0, 1\} \\ 3m^2 + 4m + m + 2, & \text{jeśli } r = 2. \end{cases}$$

Ponieważ jednak $3m^2 + m = 2m^2 + m(m + 1)$ jest liczbą parzystą, z powyższego wynika, że liczba

$$\left[\frac{n^2 + n}{3} \right]$$

jest parzysta. $\square$

3. W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku $\overline{CD}$, a F jest takim punktem leżącym na boku $\overline{AB}$, że $|AF| : |FB| = 3 : 1$. Wykazać, że $|AF| = |EF|$ wtedy i tylko wtedy, gdy proste AE i BD są prostopadłe.

Rozwiązanie

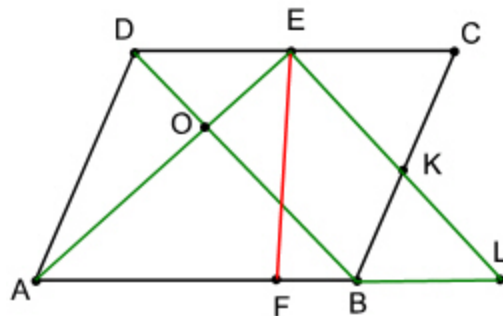
Niech K będzie środkiem boku $\overline{BC}$, zaś L punktem przecięcia prostych EK i AB . Odcinek $\overline{EK}$, jest równoległy do przekątnej $\overline{BD}$ (jako odcinek łączący środki ramion trójkąta BDC). Tak więc $EL \parallel BD$. Stąd wynika, że

$$|BL| = |ED| = \frac{1}{2}|AB|,$$

czyli $|AF| = |FL|$.

Jeśli $BD \perp AE$, to $\angle AEL = 90^\circ$. Punkt F jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego AEL , a więc środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Tym samym $|AF| = |EF|$. Odwrotnie, jeśli $|AF| = |EF|$ ($= |FL|$), to F jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AEL , zaś $\overline{AL}$ jest średnicą tego okręgu. Tak więc, $\angle AOB = \angle AEL = 90^\circ$.

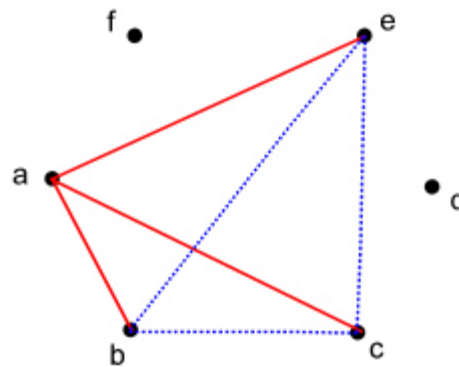
□



4. Zbiór A składa się z sześciu liczb naturalnych, wśród których nie ma trzech liczb parami względnie pierwszych. Udowodnić, że A zawiera trzy liczby, spośród których każde dwie mają wspólny dzielnik większy od 1. Czy można twierdzić, że A zawiera trzy liczby mające wspólny dzielnik większy od 1 ?

Rozwiązanie [Por. Zadania Przygotowawcze - zadanie 10].

Niech $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Na płaszczyźnie zaznaczymy sześć punktów (mogą to być np. wierzchołki sześciokąta foremego), a następnie punkty te oznaczmy liczbami ze zbioru A . Połączmy punkty odcinkami czerwonym lub niebieskim, przy czym stosujemy kolor czerwony - jeśli liczby odpowiadające łączonym punktom są względnie pierwsze, oraz kolor niebieski - jeśli te liczby nie są względnie pierwsze. Weźmy pod uwagę dowolny punkt - oznaczony np. liczbą a . Spośród pięciu odcinków wychodzących z a , przynajmniej trzy są tego samego koloru. Powiedzmy, że ab , ac i ae są czerwone. Wtedy żaden z odcinków łączących wzajemnie b, c , i e nie może być czerwony (bo mielibyśmy trójkę liczb parami względnie pierwszych).



Wszystkie odcinki łączące wzajemnie b, c , i e są zatem niebieskie, a więc liczby b, c , i e spełniają warunki zadania. Jeśli zaś odcinki ab , ac i ae są niebieskie, to zgodnie z założeniami zadania przynajmniej jeden z trzech odcinków łączących wzajemnie b, c , i e musi być niebieski. Liczby odpowiadające jego końcom wraz z liczbą a stanowią poszukiwaną trójkę liczb.

Z łatwością sprawdzamy, że zbiór $A = \{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5\} \cup \{7 \cdot 11, 7 \cdot 13, 11 \cdot 13\}$ spełnia założenia zadania i nie ma w nim trójki liczb mających wspólny dzielnik większy od 1. □