X Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - gimnazjum

28 kwietnia 2018 r.

1. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniających warunki: x daje resztę z dzielenia przez y równą 1, y daje resztę z dzielenia przez x równą 2.

Rozwiązanie.

Rozważmy trzy przypadki:

- jeśli $x = y$, to x daje resztę zero z dzielenia przez y, sprzeczność.
- jeśli $x > y$, to y jest resztą z dzielenia y przez x. Zatem jeśli $x > y$, to $y = 2$. Otrzymujemy rozwiązania $y = 2$, x nieparzyste i większe od 2.
- jeśli $x < y$, to x jest resztą z dzielenia x przez y. Zatem $x = 1$. Ale wtedy reszta z dzielenia y przez $x = 1$ wynosi zero. Sprzeczność.

Odpowiedź: Pary liczb spełniających tę zależność to $y = 2$, x nieparzyste i większe od 2.

2. Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że

$$\sqrt{3(ab+bc+ac)} \leqslant a+b+c < 2\sqrt{ab+bc+ac}.$$

Rozwiązanie.

Wykażmy najpierw nierówność $\sqrt{3(ab+bc+ac)} \leqslant a+b+c$. Obie strony są dodatnie, więc możemy podnieść je do kwadratu, uzyskując równoważną nierówność

$$3(ab+bc+ac) \leqslant (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca).$$

Po odjęciu $3(ab+bc+ca)$ od obu stron i pomnożeniu przez dwa, otrzymujemy nierówność

$$0 \leqslant 2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ac),$$

ale $2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ac) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, więc ta ostatnia nierówność jest prawdziwa. *Uwaga: w tej części rozumowania nie użyliśmy założenia, że a, b, c są długościami boków trójkąta.*

Pokażmy teraz nierówność $a+b+c < 2\sqrt{ab+bc+ac}$. Podobnie jak poprzednio, obie strony są dodatnie. Po podniesieniu do kwadratu otrzymujemy

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) < 4(ab+bc+ca),$$

czyli równoważnie

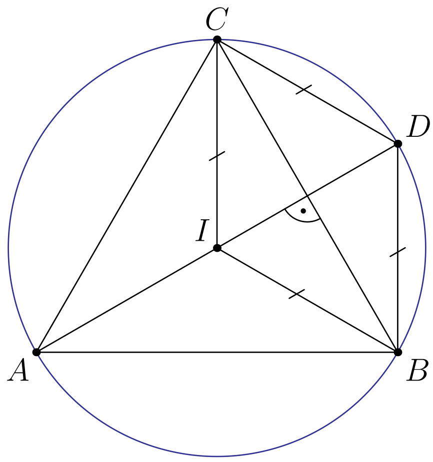
$$0 < 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2). \tag{1}$$

Mamy $2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)=a(b+c-a)+b(a+c-b)+c(a+b-c)$. Skoro a, b, c są długościami boków trójkąta, to $b+c>a$, $a+c>b$, $a+b>c$, więc wyrażenie $a(b+c-a)+b(a+c-b)+c(a+b-c)$ jest dodatnie i tym samym nierówność (1) jest prawdziwa.

3. Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg. Niech dwusieczna kąta BAC przecina ten okrąg w punkcie D, różnym od A. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Pokaż, że jeśli czworokąt $IBDC$ jest rombem, to trójkąt ABC jest równoboczny.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez α, β, γ miary kątów BAC, ABC, BCA odpowiednio. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, a więc BI, CI są dwusiecznymi. Stąd wynika, że $\sphericalangle ICB=\gamma/2$ oraz $\sphericalangle IBC=\beta/2$. Również AI jest dwusieczną, więc $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BAI=\alpha/2$. Miary kątów wpisanych $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle BCD$ są równe, więc $\sphericalangle BCD=\alpha/2$. Skoro $IBDC$ jest rombem, to $IC=IB$. Zatem trójkąt ICB jest równoramienny, czyli $\sphericalangle ICB=\sphericalangle IBC$. Stąd $\beta=\gamma$. Skoro $IBDC$ jest rombem, to trójkąty BCI oraz BCD są przystające na mocy cechy bok-bok-bok. Zatem $\sphericalangle BCD=\sphericalangle BCI$. Ale $\sphericalangle BCD=\alpha/2$ oraz $\sphericalangle BCI=\gamma/2$, więc $\alpha=\gamma$.



Łącznie stwierdzamy, że $\alpha=\beta=\gamma$, czyli ABC jest równoboczny.

4. Wyznacz wszystkie piątki liczb dodatnich (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) spełniające układ równań

$$\begin{cases} x_1+x_2-\frac{1}{x_1x_2}=x_3\\ x_2+x_3-\frac{1}{x_2x_3}=x_4\\ x_3+x_4-\frac{1}{x_3x_4}=x_5\\ x_4+x_5-\frac{1}{x_4x_5}=x_1\\ x_5+x_1-\frac{1}{x_5x_1}=x_2\end{cases}$$

Rozwiązanie – sposób I

Wybierzmy piątkę (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) liczb dodatnich spełniających układ. Zauważmy, że również piątki liczb (x_2,x_3,x_4,x_5,x_1), (x_3,x_4,x_5,x_1,x_2), (x_4,x_5,x_1,x_2,x_3), (x_5,x_1,x_2,x_3,x_4) spełniają ten układ równań. Z powyższych rozwiązań układu wybierzmy tę piątkę (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5), w której $a_3=\max(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$.

Liczby $(a_1,\ldots,a_5)$ spełniają równania

$$\begin{cases} a_1+a_2-\frac{1}{a_1a_2}=a_3\\ a_2+a_3-\frac{1}{a_2a_3}=a_4\\ a_3+a_4-\frac{1}{a_3a_4}=a_5\\ a_4+a_5-\frac{1}{a_4a_5}=a_1\\ a_5+a_1-\frac{1}{a_5a_1}=a_2\end{cases}$$

Odejmijmy stronami dwa pierwsze równania. Mamy

$$\left(a_1+a_2-\frac{1}{a_1a_2}\right)-\left(a_2+a_3-\frac{1}{a_2a_3}\right)=(a_1-a_3)+\frac{1}{a_2}\left(\frac{a_1}{a_1a_3}-\frac{a_3}{a_1a_3}\right)=(a_1-a_3)\left(1+\frac{1}{a_1a_2a_3}\right).$$

Skoro a_i są dodatnie i a_3 jest największe z nich, to wynik powyżej jest niedodatni, czyli

$$a_3 - a_4 = \left(a_1 + a_2 - \frac{1}{a_1 a_2}\right) - \left(a_2 + a_3 - \frac{1}{a_2 a_3}\right) \leqslant 0.$$

Stąd $a_3 \leqslant a_4$. Ale $a_3 = \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, więc $a_3 \geqslant a_4$. Łącznie otrzymujemy $a_3 = a_4$. Zauważmy, że to znaczy, że a_4 jest również największą z liczb a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Odejmując stronami równanie drugie i trzecie i powtarzając poprzednie rozumowanie, stwierdzamy, że $a_4 = a_5$. Odejmując stronami równanie trzecie i czwarte oraz czwarte i piąte, stwierdzamy, że $a_5 = a_1$ oraz $a_1 = a_2$. Łącznie, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a$, czyli układ sprowadza się do równania

$$2a - \frac{1}{a^2} = a,$$

czyli $a^3 = 1$, którego jedynym rozwiązaniem dodatnim jest $a = 1$. Zatem $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Wynika stąd, że również $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$ i to jest jedyne rozwiązanie układu z zadania.

Rozwiązanie – sposób II

Dodając wszystkie równania układu stronami otrzymamy równanie:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_4} + \frac{1}{x_4 x_5} + \frac{1}{x_5 x_1}. \qquad (2)$$

Zauważmy, że jeśli wszystkie liczby x_i spełniają nierówności $x_i \leqslant 1$, to lewa strona powyższego równania jest $\leqslant 5$, zaś prawa jest $\geqslant 5$. Równość zajdzie tylko wtedy, gdy wszystkie liczby x_i są równe 1. Przypuśćmy teraz, że liczby dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_5$ spełniają układ i że przynajmniej jedna z nich jest > 1. Bez zmniejszania ogólności niech np. $x_1 > 1$. Zauważmy, że wówczas $x_2 < 1$. W przeciwnym razie jeśli $x_2 \geqslant 1$, to $\frac{1}{x_1 x_2} < 1$ oraz

$$x_3 = x_1 + x_2 - \frac{1}{x_1 x_2} > 1 + 1 - 1 = 1.$$

Z tych samych powodów z kolejnych równań wynika, że $x_4 > 1$ i $x_5 > 1$. Jest to niemożliwe, gdyż lewa strona równania (2) jest większa od 5 a prawa mniejsza od 5. Tak więc $x_2 < 1$. Z tych samych powodów co wyżej, liczba x_3 nie może spełniać nierówności $x_3 \leqslant 1$, gdyż w przeciwnym razie

$$x_4 = x_2 + x_3 - \frac{1}{x_2 x_3} < 1 + 1 - 1 = 1.$$

Dalej z kolejnych równań otrzymalibyśmy, że wszystkie liczby x_i są mniejsze od 1, co jest niemożliwe. Kontynuując to rozumowanie otrzymujemy: $x_2 < 1$, $x_3 > 1$, $x_4 < 1$,$x_5 > 1$ oraz $x_1 < 1$ wbrew założeniu, że $x_1 > 1$. Ostatecznie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ jest jedynym rozwiązaniem układu.

[pg, jj]