IX Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - gimnazjum

20 maja 2017 r.

1. Dowiedź, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$111\ldots11222\ldots22$$

zbudowana z n jedynek i n dwójek jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych.
Rozwiązanie.

Oznaczmy przez $a = 111\ldots11$ liczbę złożoną z n jedynek. Wtedy $9a + 1 = 10^n$. Liczba $111\ldots11222\ldots22$ z zadania jest równa $10^n \cdot a + 2a$. Zauważmy, że

$$10^n \cdot a + 2a = (9a + 1)a + 2a = 9a^2 + 3a = 3a \cdot (3a + 1).$$

Innymi słowy, liczba z zadania jest iloczynem kolejnych liczb $3a$ i $3a + 1$.

2. Na szachownicy 2017×2017 wybrano 4035 pól. Pokaż, że środki pewnych trzech z nich leżą na jednej prostej.
Rozwiązanie.

Szachownica ma 2017 rzędów. Gdyby w każdym rzędzie wybrano co najwyżej dwa pola, to łącznie wybrano by co najwyżej $2 \cdot 2017 < 4035$ pól. Zatem w pewnym rzędzie wybrano trzy pola; oczywiście ich środki leżą na jednej prostej, równoległej do krawędzi szachownicy.

3. Niech $a \geqslant 2$ będzie liczbą rzeczywistą oraz niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Wykaż, że zbiór $\{1, a, a^2, \ldots, a^n\}$ nie zawiera rozłącznych podzbiorów o równych sumach elementów.
Rozwiązanie.

Przypuśćmy, że zbiór $\{1, a, a^2, \ldots, a^n\}$ zawiera dwa rozłączne podzbiory A, B o równych sumach. Niech m oznacza największy wykładnik dla którego a^m należy do jednego z tych podzbiorów. Załóżmy, że $a^m \in A$. Fakt, że sumy elementów w obu podzbiorach są równe możemy zapisać przy pomocy równości:

$$a^m = x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \ldots + x_{m-1} a^{m-1},$$

gdzie $x_i = -1$ jeśli $a^i \in A$, $x_i = 1$ jeśli $a^i \in B$ oraz $x_i = 0$ jeśli a^i nie należy ani do A ani do B. Korzystając z nierówności mówiącej, że wartość bezwzględna sumy liczb jest nie mniejsza od sumy ich wartości bezwzględnych otrzymujemy:

$$a^m = |a^m| = |x_0 + x_1 a + x_2 a^2 + \ldots + x_{m-1} a^{m-1}| \leqslant |x_0| + |x_1 a| + \ldots + |x_{m-1} a^{m-1}| \leqslant$$
$$\leqslant 1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1} = \frac{a^m - 1}{a - 1} \leqslant a^m - 1.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że rozłączne podzbiory w $\{1, a, a^2, \ldots, a^n\}$ o równych sumach nie istnieją.

W powyższym rozwiązaniu skorzystaliśmy z tożsamości

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1} = \frac{a^m - 1}{a - 1},$$

która zachodzi dla dowolnej liczby $a \neq 1$. Łatwo ją wykazać. Mianowicie oznaczmy $S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1}$. Mamy $aS = a + a^2 + \ldots + a^m$, a więc

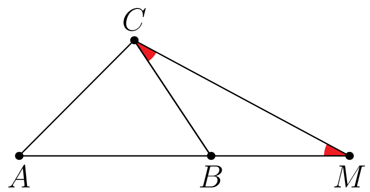
$$(a-1)S = aS - S = (a + a^2 + \ldots + a^m) - (1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1}) = a^m - 1.$$

Stąd wynika, że $S = \frac{a^m-1}{a-1}$.

4. Na przedłużeniu najdłuższego boku AB trójkąta ABC obrano punkt M taki, że $BM = BC$. Wykaż, że kąt $\sphericalangle ACM$ jest rozwarty.

Rozwiązanie.

Skoro $|MB| = |BC| < |AB|$ i nie punkt M nie leży na odcinku AB, to punkt B leży na odcinku AM, patrz rysunek.

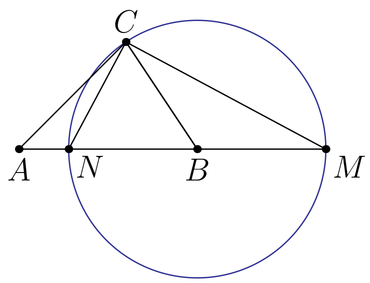


Bok AB jest najdłuższy, więc kąt $\sphericalangle ACB$ ma największą miarę spośród kątów trójkąta ABC. Ponadto z równości odcinków $BC = BM$ wynika równość kątów $\sphericalangle BCM = \sphericalangle AMC$. Mamy więc

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCM > \sphericalangle BAC + \sphericalangle AMC = 180^\circ - \sphericalangle ACM.$$

Stąd wynika, że $2\sphericalangle ACM > 180^\circ$, czyli $\sphericalangle ACM > 90^\circ$.

Sposób II



Skoro $|MB| = |BC| < |AB|$ i nie punkt M nie leży na odcinku AB, to punkt B leży na odcinku AM, patrz rysunek. Niech N będzie takim punktem odcinka AB, że $|BN| = |BC|$. Wtedy $CB = BN = BM$, więc B jest środkiem okręgu opisanego na CNM, zaś NM jest średnicą tego okręgu.

Stąd $\sphericalangle NCM = 90^\circ$ i $\sphericalangle ACM > \sphericalangle NCM = 90^\circ$.

[*pg, jj*]