

VIII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - gimnazjum

14 maja 2016 r.

1. Liczba x jest rzeczywista i taka, że $x^5 - x$ oraz $x^2 - 1$ są obie całkowite. Pokaż, że x jest również całkowita.

Rozwiązanie, sposób I

Oznaczmy liczbę całkowitą x^2 przez k . Wtedy $x = \sqrt{k}$, zatem $x^5 - x = \sqrt{k}(k^2 - 1)$ jest całkowita. Jeżeli $k = \pm 1$, to x jest całkowita. Jeżeli $k \neq \pm 1$ to $k^2 - 1 \neq 0$ i liczba

$$x = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{k}(k^2 - 1)}{k^2 - 1},$$

jest wymierna. Oznaczmy $x = p/q$ gdzie liczby p i q są całkowite i względnie pierwsze. Liczba $x^2 = p^2/q^2$ jest całkowita, więc q^2 dzieli p^2 . Ale q^2 jest względnie pierwsze z p^2 . Stąd wynika, że $q^2 = 1$, zatem $q = \pm 1$ i $x = p/q$ jest całkowita.

Rozwiązanie, sposób II

Jeżeli $x^2 - 1 = 0$ to $x = \pm 1$ jest całkowita. Załóżmy, że $x^2 - 1 \neq 0$. Zachodzi $x^5 - x = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)$. Liczby $x^2 - 1$ oraz $x^2 + 1 = (x^2 - 1) + 2$ są całkowite, więc

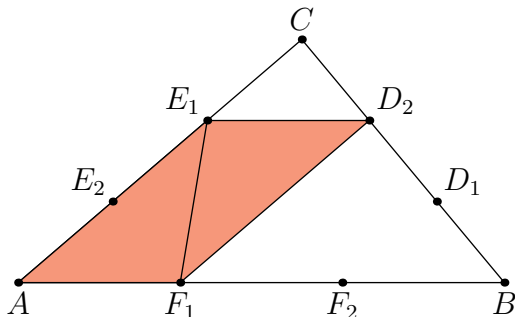
$$x = \frac{x^5 - x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

jest wymierna. Dalej rozumujemy jak w sposobie I.

2. Dany jest trójkąt ABC . Na boku BC zaznaczono punkty D_1, D_2 , na boku CA zaznaczono punkty E_1, E_2 , zaś na boku AB zaznaczono punkty F_1, F_2 tak, że każdy bok został podzielony na trzy równe części. Pokaż, że suma pól ośmiu trójkątów $D_i E_j F_k$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2\}$, jest równa dwukrotności pola trójkąta ABC .

Rozwiązanie, sposób I

Jest pewna dowolność we wprowadzaniu oznaczeń punktów D_i, E_j, F_k , my przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Z twierdzenia (odwrotnego do) twierdzenia Talesa wynika, że $E_1 D_2 \parallel AB$ i $|E_1 D_2| = \frac{1}{3}|AB| = |AF_1|$. Zatem odcinki $E_1 D_2$ i AF_1

są równej długości i równoległe, czyli $AE_1D_2F_1$ jest równoległobokiem. Wobec tego trójkąty AF_1E_1 i $D_2E_1F_1$ są przystające.

Analogicznie pokazujemy, że przystające są trójkąty BD_1F_1 i $E_2D_1F_1$ oraz trójkąty CE_1D_1 i $F_2E_1D_1$. Tym samym

$$[E_1F_1D_1] + [D_2E_1F_1] + [E_2D_1F_1] + [F_2E_1D_1] = [E_1F_1D_1] + [AE_1F_1] + [BD_1F_1] + [CE_1D_1] = [ABC].$$

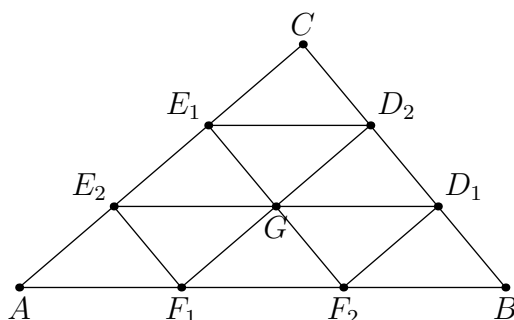
Analogicznie dowodzimy, że

$$[E_2F_2D_2] + [D_1E_2F_2] + [E_1D_2F_2] + [F_1E_2D_2] = [E_2F_2D_2] + [AE_2F_2] + [BD_2F_2] + [CE_2D_2] = [ABC].$$

Łącznie więc pole ośmiu trójkątów wynosi $2[ABC]$.

Rozwiązanie, sposób II

Jest pewna dowolność we wprowadzaniu oznaczeń punktów D_i, E_j, F_k , my przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Z twierdzenia (odwrotnego do) twierdzenia Talesa wynika, że $E_1D_2 \parallel AB$ i $|E_1D_2| = \frac{1}{3}|AB| = |F_1F_2|$. Zatem odcinki E_1D_2 i F_1F_2 są równej długości i równoległe, czyli $F_1E_1D_2F_2$ jest równoległobokiem. Wobec tego odcinki E_1F_2 i F_1D_2 połowią się. Analogicznie pokazujemy, że również odcinki E_1F_2 i D_1E_2 połowią się. Zatem D_1E_2 , E_1F_2 , F_1D_2 przecinają się w punkcie G , który leży w połowie każdego z tych odcinków.

Teraz łatwo wykazać, że każdy z 9 małych trójkącików na rysunku ma boki długości $\frac{1}{3}AB$, $\frac{1}{3}BC$ i $\frac{1}{3}AC$, więc jest podobny w skali $\frac{1}{3}$ do trójkąta ABC . Oznaczmy pole ABC przez P , wtedy pole małego trójkącika wynosi $\frac{1}{9}P$.

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Każdy z ośmiu trójkątów $D_iE_jF_k$ jest zbudowany z małych trójkącików lub ich połówek. To pozwala łatwo wyliczyć pola tych trójkątów. Wtedy

$$[D_1E_1F_1] = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}P = \frac{1}{3}P,$$

$$[D_2E_2F_2] = \frac{1}{3}P,$$

$$[D_1E_1F_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}P + \frac{1}{9}P = \frac{2}{9}P,$$

$$[D_1E_2F_1] = [D_1E_2F_2] = [D_2E_1F_1] = [D_2E_1F_2] = [D_2E_2F_1] = \frac{2}{9}P.$$

Sumując pola, otrzymujemy $2 \cdot \frac{1}{3}P + 6 \cdot \frac{2}{9}P = 2P$.

Rozwiązanie, sposób III, szkic

Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ .

Skorzystajmy z następującego faktu: niech S, T, U i V będą dowolnymi punktami płaszczyzny i M będzie środkiem odcinka UV . Wtedy

$$[STU] + [STV] = 2[STM].$$

Uzasadnienie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi.

Oznaczmy przez D, E, F środki boków BC, CA, AB trójkąta ABC . Wtedy D jest środkiem odcinka D_1D_2 , E jest środkiem odcinka E_1E_2 , zaś F jest środkiem odcinka F_1F_2 .

Stosując fakt powyżej dla $(U, V) = (D_1, D_2)$ mamy

$$[D_1E_1F_1] + [D_2E_1F_1] = 2[DE_1F_1],$$

$$[D_1E_1F_2] + [D_2E_1F_2] = 2[DE_1F_2],$$

$$[D_1E_2F_1] + [D_2E_2F_1] = 2[DE_2F_1],$$

$$[D_1E_2F_2] + [D_2E_2F_2] = 2[DE_2F_2],$$

Pozostaje obliczyć sumę pól czterech trójkątów. Ponownie stosujemy fakt, tym razem dla $(U, V) = (E_1, E_2)$:

$$[DE_1F_1] + [DE_2F_1] = 2[DEF_1]$$

$$[DE_1F_2] + [DE_2F_2] = 2[DEF_2]$$

Wreszcie, ponownie z faktu wynika, że

$$[DEF_1] + [DEF_2] = 2[DEF].$$

Sumując pole ośmiu trójkątów otrzymaliśmy $8[DEF]$. Ale trójkąt $[ABC]$ da się wypełnić czterema trójkątami przystającymi do DEF , więc $8[DEF] = 2[ABC]$, co kończy dowód.

3. Na szachownicy 8×8 zaznaczono L pól. Niech K oznacza liczbę par zaznaczonych pól sąsiadujących bokami. Znajdź największą możliwą wartość $L - K$.

Rozwiązanie.

Weźmy dowolne zaznaczenie pól. Jeżeli pewne dwa z nich są sąsiednie, to odznaczając jedno z pól zmniejszamy L o jeden, zaś K o co najmniej jeden. Tym samym $L - K$ nie zmniejsza się.

Rozważmy ustawienie, dla którego $L - K$ jest maksymalne. Odznaczając jak powyżej, dochodzimy, nie zmniejszając $L - K$, do sytuacji, gdy żadne dwa sąsiednie pola nie są oba zaznaczone, czyli $K = 0$. Szachownicę można podzielić na 32 pary sąsiednich pól. W każdej parze co najwyżej jedno pole jest zaznaczone, więc $L \leq 32$, czyli maksymalna wartość $L - K$ to co najwyżej 32.

Zaznaczając wszystkie czarne pola szachownicy otrzymujemy $L = 32$, $K = 0$, czyli $L - K = 32$.

Odpowiedź: Największa możliwa wartość $L - K$ to 32.

4. Trójkąt i kwadrat mają równe pola. Która z tych figur ma większy obwód? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie, sposób I

Oznaczmy przez a, b, c długości boków trójkąta, zaś przez h_a długość wysokości opuszczonej na bok a . Wtedy pole trójkąta wynosi $\frac{1}{2}ah_a$. Tyle samo wynosi pole kwadratu, zatem jego długość jego obwodu to $4\sqrt{\frac{1}{2}ah_a} = \sqrt{8ah_a}$.

Oczywiście $b, c \geq h_a$ i co najwyżej dla jednego boku zachodzi równość. Wobec tego $b + c > 2h_a$. Zatem

$$a + b + c > a + 2h_a.$$

co więcej, $(\sqrt{a} - \sqrt{2h_a})^2 \geq 0$, więc $a + 2h_a \geq 2\sqrt{a \cdot 2h_a} = \sqrt{8ah_a}$. Łącznie

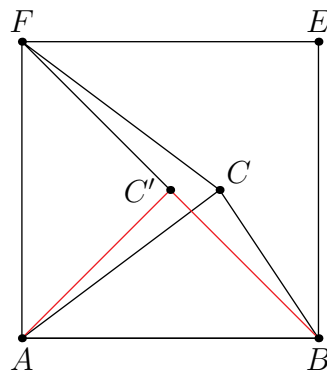
$$a + b + c > \sqrt{8ah_a} = 4\sqrt{\frac{1}{2}ah_a}.$$

Odpowiedź: Trójkąt ma większy obwód niż kwadrat.

Uwaga 1: Nierówność $a + 2h_a \geq 2\sqrt{a \cdot 2h_a}$ czy też $\frac{a+(2h_a)}{2} \geq \sqrt{a \cdot (2h_a)}$ jest niczym innym jak nierównością pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną dla dwóch liczb, bardzo powszechnie stosowaną w matematyce olimpijskiej.

Rozwiązanie, sposób II, na podstawie rozwiązania Jagody Brachy

Zastanówmy się najpierw, który z trójkątów o ustalonym polu P ma najmniejszy obwód. Weźmy taki trójkąt ABC . Niech h oznacza długość wysokości opuszczonej na bok AB z wierzchołka C . Zbudujmy prostokąt $ABEF$ o bokach długości $|AB|$ i $2h$, jak na rysunku. Niech C' oznacza środek tego prostokąta, wtedy trójkąt ABC' także ma pole P .



Co więcej, $AC' + C'B = FB \leq FC + CB$. Wobec tego, jeżeli $AC \neq BC$, to znaleźliśmy trójkąt o mniejszym obwodzie niż ABC i tym samym polu. To daje sprzeczność z wyborem trójkąta ABC . Wnioskujemy, że $AC = BC$. Analogicznie, $AB = BC$, więc wśród trójkątów o ustalonym polu najmniejszy obwód ma trójkąt równoboczny.

Wróćmy do rozwiązania zadania. Twierdzimy, że trójkąt ma większy obwód niż kwadrat o tym samym polu. Z wniosku powyżej wynika, że wystarczy nam sprawdzić, że trójkąt równoboczny ma większy obwód niż kwadrat o tym samym polu.

Sprawdzamy to bezpośrednio. Niech a oznacza długość boku kwadratu, wtedy pole to a^2 , zaś obwód kwadratu to $4a$. Pole trójkąta równobocznego o boku długości b wynosi $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, czyli

$$b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2.$$

Chcemy sprawdzić, że $3b > 4a$. Równoważnie, wystarczy sprawdzić, że $9b^2 > 16a^2$. Podstawiając a^2 z równości powyżej dochodzimy do nierówności

$$9b^2 > 16 \cdot b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4b^2 \cdot \sqrt{3}.$$

Skracając przez b^2 i 4 otrzymujemy $9 > 4\sqrt{3}$. Wreszcie, po podniesieniu do kwadratu dostajemy $81 > 48$, czyli nierówność prawdziwą. Wszystkie przejścia były równoważne, zatem i nierówność pomiędzy obwodami jest dowiedziona.

Rozwiązanie, sposób III, na podstawie rozwiązania Jana Fabrowskiego

Oznaczmy długości boków trójkąta przez x, y, z , zaś pole obu figur przez P . Wzór Herona głosi, że

$$P = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)},$$

stąd obwód kwadratu o polu P wynosi

$$4\sqrt{P} = 2\sqrt[4]{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

Z nierówności trójkąta wynika, że wszystkie czynniki pod pierwiastkiem są dodatnie. Nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną dla czterech liczb $x+y+z$, $-x+y+z$, $x-y+z$, $x+y-z$ pokazuje, że

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z}{2} &= \frac{(x+y+z) + (-x+y+z) + (x-y+z) + (x+y-z)}{4} \geq \\ &\geq \sqrt[4]{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}. \end{aligned}$$

Co więcej, równość zachodziłaby tylko gdyby $x+y+z = -x+y+z = x-y+z = x+y-z$, co jest niemożliwe. Zatem zachodzi nierówność *ostra*.

To pokazuje, że obwód trójkąta wynoszący $x+y+z$ jest większy od obwodu kwadratu, czyli od $2\sqrt[4]{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$.

[pg, jj]