



VI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - gimnazjum

17 maja 2014 r.

1. Dany jest trójkąt ABC . Okręgi, których średnicami są boki AC i BC tego trójkąta, przecinają się w punktach C i X . Wykazać, że punkty A , B oraz X są współliniowe.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez H spodek wysokości trójkąta ABC opuszczonej na bok AB , czyli rzut prostopadły wierzchołka C na prostą AB . Skoro $\angle AHC = 90^\circ$ oraz $\angle BHC = 90^\circ$, to H należy do okręgu którego średnicą jest AC oraz do okręgu którego średnicą jest BC . Wynika stąd, że $X = H$. W szczególności punkty A , X i B są współliniowe.

2. Trójkę liczb dodatnich (a, b, c) nazwiemy *trójkątną*, jeśli $a < b < c$ oraz z odcinków o długościach a , b , c można zbudować trójkąt. Jaka jest największa liczba różnych trójek trójkątnych, jakie można utworzyć ze 100 różnych dodatnich liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

Weźmy zbiór 100 liczb całkowitych dodatnich $\mathcal{Z} = \{100, 101, \dots, 199\}$. Weźmy dowolne trzy różne liczby $a < b < c$ z tego zbioru. Wtedy $a + b > 100 + 100 > c$, więc trójka (a, b, c) jest trójkątna.

Chcemy policzyć liczbę takich trójek liczb całkowitych (a, b, c) , że $a < b < c$. Robimy to następująco: wybieramy dowolną liczbę A ze zbioru $\mathcal{Z}$, następnie wybieramy dowolną liczbę B ze zbioru $\mathcal{Z} \setminus \{A\}$ i dowolną liczbę C ze zbioru $\mathcal{Z} \setminus \{A, B\}$, po czym porządkujemy otrzymaną trójkę A, B, C , tak, by otrzymać trójkę (a, b, c) spełniającą $a < b < c$. Liczbę A możemy wybrać na 100 sposobów, liczbę B na 99 sposobów, zaś liczbę C na 98 sposobów. Ponadto każdą trójkę (a, b, c) otrzymujemy 6 razy, z trójek: (a, b, c) , (a, c, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, a, b) , (c, b, a) . Wobec tego łączna liczba trójek uporządkowanych wynosi

$$\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 161700.$$

3. Liczba naturalna n jest taka, że zapis dziesiętny liczby n^3 kończy się ciągiem cyfr 000000001. Uzasadnić, że również zapis dziesiętny liczby n kończy się tym ciągiem cyfr.

I rozwiązanie, na podstawie rozwiązania Karoliny Tkaczuk

Niech n będzie liczbą z zadania. Założenie zadania mówi, że liczba $n^3 - 1$ kończy się ciągiem cyfr 000000000, co znaczy, że liczba $n^3 - 1$ jest podzielna przez 10^9 . Teza zadania głosi, że również liczba $n - 1$ jest podzielna przez 10^9 .

Zauważmy, że cyfra jedności liczby n^3 zależy jedynie od cyfry jedności liczby n . Sprawdzając wszystkie przypadki, stwierdzamy, że cyfrą jedności liczby n jest 1. Zapiszmy n w postaci $n = 10^s k + 1$, gdzie k jest liczbą niepodzielną przez 10 i $s > 0$. Wtedy

$$n^3 - 1 = 10^{3s} + 3k^2 \cdot 10^{2s} + 3k \cdot 10^s = 10^s \cdot (10^{2s} + 3k^2 \cdot 10^s + 3k),$$

więc liczba $n^3 - 1$ jest podzielna przez 10^s , ale niepodzielna przez 10^{s+1} . Z założenia liczba $n^3 - 1$ jest podzielna przez 10^9 , więc $s \geq 9$. Skoro tak, to $n - 1 = 10^s k$ jest podzielna przez 10^9 , co dowodzi tezy.

II rozwiązanie

Niech n będzie liczbą z zadania. Założenie zadania mówi, że liczba $n^3 - 1$ kończy się ciągiem cyfr 000000000, co znaczy, że liczba $n^3 - 1$ jest podzielna przez 10^9 . Teza zadania głosi, że również liczba $n - 1$ jest podzielna przez 10^9 .

Zauważmy, że

$$n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1).$$

Liczba $n^2 + n = n(n + 1)$ jest parzysta dla dowolnego n , więc liczba $n^2 + n + 1$ jest nieparzysta, tzn. niepodzielna przez 2.

Podobnie chcemy pokazać, że liczba $n^2 + n + 1$ jest niepodzielna przez 5. Sprawdzamy, że żadna z liczb $0^2 + 0 + 1$, $1^2 + 1 + 1$, $2^2 + 2 + 1$, $3^2 + 3 + 1$, $4^2 + 4 + 1$ nie jest podzielna przez 5. Zapiszmy teraz $n = 5q + r$, gdzie q jest całkowite i $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Mamy

$$n^2 + n + 1 = (5q + r)^2 + (5q + r) + 1 = 5(5q^2 + 2qr + q) + (r^2 + r + 1).$$

Skoro $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, to liczba $r^2 + r + 1$ jest niepodzielna przez 5, więc również liczba $n^2 + n + 1$ jest niepodzielna przez 5.

Wobec tego liczba $n^2 + n + 1$ jest względnie pierwsza z $2 \cdot 5 = 10$, czyli również względnie pierwsza z 10^9 . Skoro 10^9 dzieli $(n - 1)(n^2 + n + 1)$ i liczba $n^2 + n + 1$ jest względnie pierwsza z 10^9 , to 10^9 dzieli $n - 1$, czego należało dowieść.

4. Liczby nieujemne a , b oraz $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ są wymierne. Dowieść, że liczby $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ są również wymierne.

I rozwiązanie

Skorzystamy ze znanej tożsamości $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Podstawiając w niej $x = \sqrt{a}$ oraz $y = \sqrt{b}$, otrzymujemy

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

Teza zadania jest oczywista, gdy $a = b = 0$. Załóżmy zatem, że przynajmniej jedna z liczb a, b jest dodatnia. Mamy wtedy

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Z założenia wnioskujemy, że $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ jest liczbą wymierną. Skoro suma liczb wymiernych jest liczbą wymierną, to

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2} [(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b})] \quad \text{oraz} \quad \sqrt{b} = \frac{1}{2} [(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b})]$$

są liczbami wymiernymi.

II rozwiązanie, na podstawie rozwiązania Jacka Jakimiuka

Jeżeli $a = b = 0$, to oczywiście $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ są wymierne. Dalej zakładamy, że co najmniej jedna z liczb a, b jest dodatnia. Wtedy $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.

Skoro liczba $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ jest wymierna, to również liczba

$$\sqrt{ab} = \frac{1}{2} ((\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - a - b)$$

jest wymierna. Wobec tego liczby

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{ab} + a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \quad \sqrt{b} = \frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

są również wymierne.

III rozwiązanie, na podstawie rozwiązania Karoliny Tkaczuk i Franciszka Budrowskiego

Jeżeli $a = b = 0$, to oczywiście $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ są wymierne. Dalej zakładamy, że co najmniej jedna z liczb a, b jest dodatnia. Wtedy $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Oznaczmy tę liczbę przez q .

Skoro liczba $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ jest wymierna, to również liczba

$$\sqrt{ab} = \frac{1}{2} ((\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - a - b)$$

jest wymierna. Równość $q = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ zapiszmy jako $\sqrt{a} = q - \sqrt{b}$ i podnieśmy do kwadratu. Otrzymujemy

$$a = q^2 - 2q\sqrt{b} + b^2, \quad \text{więc} \quad \sqrt{b} = \frac{q^2 + b^2 - a}{2q}$$

jest liczbą wymierną. Podobnie $\sqrt{a} = \frac{q^2 + a^2 - b}{2q}$ jest liczbą wymierną.