

IV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - gimnazjum - rozwiązania

1. Czy istnieją liczby całkowite a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 takie, że wśród liczb postaci $a_i + a_j$ ($1 \leq i < j \leq 5$) jest dziesięć kolejnych liczb całkowitych?

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że istnieją liczby całkowite a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 takie, że wśród liczb $a_i + a_j$ jest dziesięć kolejnych liczb całkowitych $m, m+1, \dots, m+9$. Zauważmy, że istnieje dokładnie dziesięć par (a_i, a_j) takich, że $1 \leq i < j \leq 5$ i każda liczba a_i wchodzi do dokładnie czterech takich par. Sumując liczby wszystkich par otrzymamy równość:

$$4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = m + (m+1) + \dots + (m+9) = 10m + 45.$$

Lewa strona powyższej równości jest liczbą parzystą, zaś prawa nieparzystą. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczby o żądanych własnościach nie istnieją.

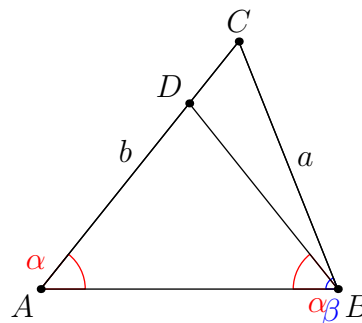
2. Na płaszczyźnie cztery okręgi o promieniu 1 mają punkt wspólny P . Udowodnić, że środki dwóch z tych okręgów są oddalone o nie więcej niż $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie oprzemy na następującym fakcie:

Jeżeli w trójkącie boki leżące naprzeciw kątów o miarach α i β mają długości a i b , to z nierówności $\alpha \leq \beta$ wynika nierówność $a \leq b$.

Oznaczmy wierzchołki i boki jak na rysunku. Na boku AC rozważmy punkt D taki, że $|\angle ABD| = \alpha$, wtedy $\triangle ABD$ jest równoramienny, więc $|AD| = |BD|$. Z nierówności trójkąta zastosowanej do $\triangle BDC$ wynika, że

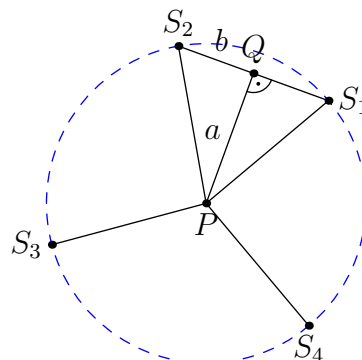
$$a = |BC| \leq |BD| + |DC| = |AD| + |DC| = |AC| = b.$$



Oznaczmy środki rozważanych okręgów kolejno przez S_1, S_2, S_3, S_4 . Suma miar kątów $\angle S_1PS_2, \angle S_2PS_3, \angle S_3PS_4, \angle S_4PS_1$ jest równa 360° , więc przynajmniej jeden z nich musi mieć miarę $\leq 90^\circ$. Przypuśćmy, że $|\angle S_1PS_2| \leq 90^\circ$ i rozważmy trójkąt równoramienny S_1PS_2 . Oznaczmy przez Q środek S_1S_2 oraz niech $|PQ| = a, |QS_2| = b$. Ponieważ $|\angle QPS_2| \leq |\angle QS_2P|$, na podstawie powyższego faktu, zachodzi nierówność $b \leq a$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta PQS_2 wynika, że

$$1 = a^2 + b^2 \geq 2b^2,$$

czyli $b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mamy więc $|S_1S_2| = 2b \leq \sqrt{2}$.

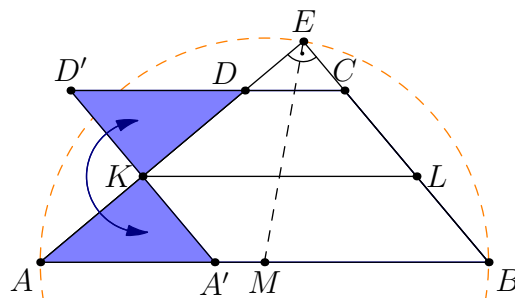


3. W trapezie $ABCD$ kąty przy podstawie AB mają miary 50° oraz 40° . Odcinek KL łączący środki nierównoległych ramion AD i BC ma długość a , zaś odcinek MN łączący środki podstaw AB i CD ma długość d . Wyznaczyć długości podstaw AB i CD .

Rozwiązanie. Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC oraz niech M oznacza środek podstawy AB . Z założeń wynika, że $|\angle ABE| = 90^\circ$. Punkt M jest zatem środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABE . W szczególności $|AM| = |EM| = |BM|$. Poprowadźmy odcinek łączący punkty M i E . Z twierdzenia Talesa wynika, że dzieli on górną podstawę na dwie równe części, a więc przecina CD w punkcie N . Zauważmy, że trójkąty MBE oraz NCE są podobne. Wynika stąd równość $|NE| = |NC|$. Udowodnimy, że

$$|KL| = \frac{|AB| + |CD|}{2}.$$

W tym celu, przez punkt K poprowadźmy prostą równoległą do BC . Oznaczmy przez A' , D' punkty przecięcia tej prostej z prostymi AB i CD . Czworokąt $A'BCD'$ jest równoległobokiem (więc $|A'B| = |CD'| = |KL|$) oraz trójkąty $AA'K$ i KDD' są przystające, przy czym $|AA'| = |DD'|$. Wynika stąd, że



$$2 \cdot |KL| = |CD'| + |A'B| = (|CD| + |DD'|) + (|AB| - |AA'|) = |CD| + |AB|.$$

Przyjmijmy, że $|AB| = x$, $|CD| = y$. Ponieważ $|MN| = |ME| - |NE| = \frac{1}{2}|AB| - \frac{1}{2}|CD|$, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = a \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = d \end{cases}$$

Dodając i odejmując równania stronami otrzymujemy kolejno: $x = a + d$ i $y = a - d$.

4. Liczby nieujemne x, y, z są takie, że $x + y + z \leq \frac{1}{2}$. Udowodnić, że

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geq \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie. Liczby x, y, z są nieujemne i ich suma nie przekracza $\frac{1}{2}$, więc każda z nich również jest nie większa niż $\frac{1}{2}$. W szczególności $xy = xy \cdot 1 \geq xy \cdot \frac{1}{2} \geq xyz$. Tym bardziej zachodzi nierówność

$$xy + yz + zx \geq xyz.$$

Stąd otrzymujemy nierówność:

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) = 1 - (x + y + z) + [(xy + xz + yz) - xyz] \geq 1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$