



III Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - gimnazjum - rozwiązania

28 maja 2011 r.

1. Dane są liczby naturalne $m < n$ takie, że ich suma jest parzysta. Wyznaczyć cyfrę jedności liczby $2^{n^2-m^2}$.

Rozwiązanie.

Obie liczby $n + m, 2m$ są parzyste, więc parzysta jest ich różnica $n - m = (n + m) - 2m$.

Liczba $(n - m)(n + m)$ jest iloczynem dwóch liczb parzystych, więc jest podzielna przez 4: $(n - m)(n + m) = 4k$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Ze wzoru skróconego mnożenia $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m) = 4k$, zatem

$$2^{n^2-m^2} = 2^{4k} = 16^k$$

zauważmy, że $6^2 = 36$ ma cyfrę jedności 6, wnioskujemy stąd, że każda potęga 16 będzie miała cyfrę jedności równą 6. Reasumując, cyfrą jedności $2^{n^2-m^2}$ jest 6.

2. W trójkąt równoboczny T wpisano trójkąt równoboczny T_1 o polu trzykrotnie mniejszym. Wykazać, że boki trójkąta T_1 są prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta T .

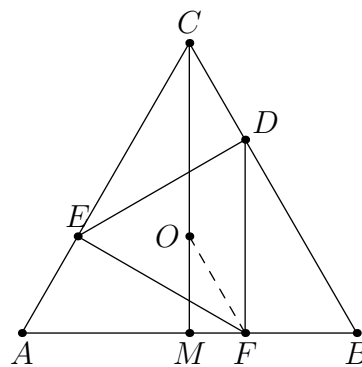
Rozwiązanie.

Niech A, B, C oraz D, E, F będą wierzchołkami trójkątów T i T_1 (patrz rys.), niech O będzie środkiem trójkąta $\triangle ABC$, zaś M — środkiem boku AB .

Obliczamy bezpośrednio, że $\angle CDE = 180^\circ - 60^\circ - \angle CED = \angle AEF$, więc trójkąty $\triangle CDE$ i $\triangle AEF$ są podobne (kkk), a nawet przystające, gdyż $DE = EF$. Identycznie rozumując stwierdzamy, że $\triangle BFD \equiv \triangle CDE$. Wynika stąd, że O jest środkiem $\triangle DEF$.

Trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ są podobne w skali $\sqrt{3} : 1$, zatem $OF = CO \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{3}$.

Punkt O dzieli odcinek CM w stosunku $2 : 1$, więc $\frac{CM}{OM} = 3 = \frac{BC}{OF}$. Z twierdzenia odwrotnego do tw. Talesa zastosowanego do kąta CMB wynika, że $OF \parallel BC$. Pozwala to obliczyć $\angle DFA = \angle DFO + \angle OFM = 30^\circ + \angle CBM = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Pozostałych prostopadłości dowodzimy analogicznie.



3. Liczby rzeczywiste a, b są takie, że $a^2 + b^2 = 1$. Jaka jest największa wartość wyrażenia $|a + b| + |a - b|$? Odpowiedź uzasadnić.

Sposób I

Zauważmy, że $1^2 + 0^2 = 1$ oraz $|1 + 0| + |1 - 0| = 2$.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, bo jest ona równoważna nierówności $0 \leq \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

Podstawiając $x := |a + b|, y := |a - b|$ stwierdzamy, że

$$\left(\frac{|a+b|+|a-b|}{2}\right)^2 \leq \frac{|a+b|^2+|a-b|^2}{2} = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2} = \frac{2(a^2+b^2)}{2} = 1$$

a więc $|a+b|+|a-b| \leq 2$.

Sposób II

Zauważmy, że $1^2 + 0^2 = 1$ oraz $|1 + 0| + |1 - 0| = 2$.

Szacujemy największą wartość wyrażenia $(|a+b|+|a-b|)^2$:

$$\begin{aligned} (|a+b|+|a-b|)^2 &= (a+b)^2 + 2|(a+b)(a-b)| + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2) + 2|a^2-b^2| \\ &= 2 + 2|a^2-b^2| \leq 2 + 2(|a^2|+|b^2|) = 4. \end{aligned}$$

Uzyskujemy oszacowanie $|a+b|+|a-b| \leq 2$. Jest to więc największa wartość tego wyrażenia.

Sposób III

Zauważmy, że $1^2 + 0^2 = 1$ oraz $|1 + 0| + |1 - 0| = 2$.

Skoro $a^2 = 1 - b^2 \leq 1$, to $|a| \leq 1$.

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą takie, że $|a-b|+|a+b|$ jest największe. Załóżmy, że $|a| \geq |b|$. Wtedy wartością jednego z wyrażeń $|a+b|, |a-b|$ jest $|a|-|b|$ a drugiego $|a|+|b|$, zatem $|a+b|+|a-b| = 2|a| \leq 2$.

4. Otwarte z góry pudełko ma kształt prostopadłościanu, którego dolna podstawa $ABCD$ jest kwadratem o boku długości 6, zaś wysokość pudełka jest równa 1. W wierzchołku A , ale na zewnątrz pudełka, znajduje się mrówka. W wierzchołku C , ale wewnątrz pudełka, znajduje się kryształek cukru. Wyznaczyć długość najkrótszej drogi jaką powinna pokonać mrówka do kryształka cukru.

Rozwiązanie.

Niech $A'B'C'D'$ będą pozostałymi wierzchołkami pudełka.

Mrówka w swej wędrówce po cukier wspina się na ścianę pudełka, schodzi po niej, po czym po podstawie przechodzi do cukru.

Rozważmy siatkę, na której początkowa pozycja mrówki jest oznaczona A_{zewn} . Najkrótszą drogą łączącą mrówkę z cukrem jest tutaj odcinek łączący punkty A_{zewn} i C , a jego długość wynosi $\sqrt{6^2 + (6+1+1)^2} = 10$.

