



II Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - gimnazjum - rozwiązania

1. Wyznaczyć największą liczbę całkowitą a taką, że istnieje liczba całkowita b spełniająca nierówności

$$\begin{cases} |a + b| \leq 3 \\ |a - 3b| \leq 2 \end{cases}.$$

Rozwiązanie.

Dla każdych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest tzw. *nierówność trójkąta*:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Założmy, że a i b spełniają układ równań z zadania oraz a jest całkowite.

Zachodzi

$$4|a| = |4a| = |3(a + b) + (a - 3b)| \leq |3(a + b)| + |a - 3b| = 3|a + b| + |a - 3b| \leq 3 \cdot 3 + 2 = 11$$

zatem $|a| \leq \frac{11}{4}$, czyli (a jest całkowite!) $a \leq 2$.

Największe a całkowite spełniające dany układ równań jest nie większe niż 2.

Z drugiej strony para $a = 2, b = 0$ spełnia układ równań.

ODPOWIEDŹ: Największa liczba całkowita a spełniająca warunek z treści zadania jest równa 2.

2. Czy istnieje dodatnia liczba całkowita x taka, że liczba y z tymi samymi cyframi co x (w dziesiętkowym systemie pozycyjnym), lecz ustawionymi w odwrotnej kolejności, spełnia równość $y = 7x$? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

Niech $\overline{a_1 \dots a_n}$ oznacza liczbę, której zapis składa się z cyfr $a_1, \dots, a_n$, przy czym $a_1 \neq 0$.

Założmy, że $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ spełnia warunek z zadania tj.

$$7 \cdot \overline{a_1 \dots a_n} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$$

Popatrzmy na pierwszą pozycję w zapisie.

Aby liczba $7 \cdot \overline{a_1 \dots a_n}$ miała n cyfr musi zachodzić $7a_1 < 10$, $a_1 < \frac{10}{7}$. Liczba a_1 jest całkowita, więc $a_1 \leq 1$. Z założenia $a_1 \neq 0$, zatem $a_1 = 1$:

$$7 \cdot \overline{1a_2 \dots a_n} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 1}$$

Stąd wynika w szczególności, że $a_n \geq 7$.

Popatrzmy teraz na ostatnią pozycję w zapisie.

Liczba $7a_n$ musi mieć cyfrę jedności równą 1. Sprawdzamy wszystkie przypadki tj. $a_n = 0, 1, \dots, 9$ i stwierdzamy, że $a_n = 3$:

$$7 \cdot \overline{1a_2 \dots a_{n-1}3} = \overline{3a_{n-1} \dots a_21}$$

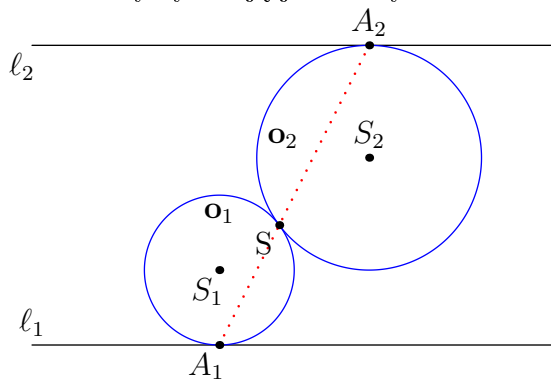
Ale $a_n > 7$. Sprzeczność.

ODPOWIEDŹ: Nie istnieje liczba, która spełniałaby podane warunki.

3. Na płaszczyźnie dane są dwie różne proste równoległe ℓ_1 i ℓ_2 . Okrąg $\mathbf{o}_1$ jest styczny do prostej ℓ_1 w punkcie A_1 , zaś okrąg $\mathbf{o}_2$ jest styczny do prostej ℓ_2 w punkcie A_2 . Wykazać, że jeśli okręgi $\mathbf{o}_1$ i $\mathbf{o}_2$ są styczne zewnętrznie w punkcie S , to punkty A_1, A_2 i S leżą na jednej prostej.

Dowód. Niech S_1, S_2 oznaczają środki okręgów $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$.

Rozważmy sytuację jak na rysunku:



Niech k oznacza wspólną styczną do okręgów $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$ w punkcie S . Zachodzi

$$k \perp S_1S$$

gdyż k jest styczną do $\mathbf{o}_2$, oraz

$$k \perp S_2S$$

bowiem k jest styczną do $\mathbf{o}_1$.

Proste SS_1 i SS_2 są równoległe jako prostopadłe do k i mają punkt wspólny S , zatem pokrywają się – punkty S_1, S, S_2 są współliniowe.

Zachodzi

$$S_1A_1 \perp \ell_1 \parallel \ell_2 \perp S_2A_2$$

a więc

$$S_1A_1 \parallel S_2A_2.$$

Kąty $\sphericalangle A_1S_1S$ i $\sphericalangle A_2S_2S$ są kątami naprzemianległymi (tutaj używamy współliniowości S_1, S, S_2), zatem

$$\sphericalangle A_1S_1S = \sphericalangle A_2S_2S.$$

Trójkąty SS_1A_1 i SS_2A_2 są równoramienne, więc

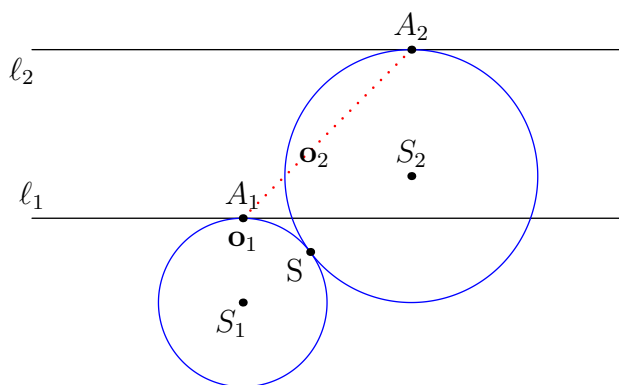
$$\sphericalangle S_1SA_1 = \frac{180^\circ - \sphericalangle A_1S_1S}{2} = \frac{180^\circ - \sphericalangle A_2S_2S}{2} = \sphericalangle S_2SA_2.$$

Obliczamy

$$\sphericalangle A_1SA_2 = \sphericalangle S_1SA_1 + \sphericalangle S_1SS_2 - \sphericalangle A_2SS_2 = \sphericalangle S_1SS_2 = 180^\circ$$

Punkty A_1, S, A_2 są więc współliniowe.

Uwaga: To rozumowanie nie uwzględnia szczególnej konfiguracji, która może się pojawić:



Uważny Czytelnik dostrzeże zapewne, w którym miejscu dowód nie uwzględnił tej sytuacji.

Zarówno podanie tej sytuacji jako kontrprzykładu jak też poprawne przeprowadzenie powyższego dowodu było uznawane za rozwiązanie.

□

4. Na stole znajdują się dwa stosy $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ złożone z monet. W $\mathcal{S}_1$ jest 2010 monet, a w $\mathcal{S}_2$ jest ich 2011. Ala i Jacek grają w grę, w której gracze wykonują ruchy na przemian. Ruch polega na wybraniu stosu i zabraniu z niego jednej, dwóch lub trzech monet. Przegrywa gracz nie mający ruchu. Ala zaczyna grę. Czy któryś z graczy posiada strategię zwycięską? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

ODPOWIEDŹ: Ala ma strategię wygrywającą.

Strategia Ali jest następująca: w pierwszym ruchu zdejmuje ona ze stosu, na którym jest 2011 monet, jedną monetę. Tym samym po pierwszym ruchu Ali na obu stosach jest tyle samo monet.

W późniejszej grze jeżeli Jacek zdejmuje ze stosu i monet, Ala zdejmuje z drugiego stosu również i monet.

Po każdym ruchu Ali na obu stosach jest tyle samo monet.

Warunek ten jest spełniony po pierwszym ruchu. W każdym następnym ruchu Ala i Jacek łącznie zdejmują po tyle samo monet z każdego stosu, zatem równość jest zachowana.

Jacek nie może wygrać.

Hipotetycznie rozważmy sytuację, gdy Jacek wygrywa. W ostatnim ruchu w grze zabiera on wszystkie monety tak, że Ala nie może wykonać ruchu.

Taka sytuacja nie jest możliwa, bo przed każdym ruchem Jacka na obu stosach jest tyle samo monet – albo 0 i wtedy Jacek przegrywa, albo więcej niż 0 i wtedy Jacek nie może zabrać wszystkich monet, gdyż zdejmuje on tylko z jednego stosu.

Gra składa się z co najwyżej $2011 + 2010$ ruchów, a więc *ktoś* wygra. Udowodniliśmy, że nie może to być Jacek, zatem Ala wygra.