



XII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy pierwsze

12 czerwca 2021 r.

1. Wyznacz wszystkie możliwe wartości n dla których po zsumowaniu n początkowych liczb naturalnych $1, 2, \dots, n$ otrzymujemy trzycyfrową liczbę mającą jednakowe cyfry. *Odpowiedź dokładnie uzasadnij.*

Rozwiązanie.

Przypomnijmy, że $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, wynika to na przykład ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego.

Założmy, że $\frac{n(n+1)}{2} = c \cdot 111$, dla $c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Jeśli $n \geq 50$, to $n^2 \geq 2500$, więc $\frac{n(n+1)}{2} > 2500/2 > 1000$ nie jest liczbą trzycyfrową. Zatem $n < 50$. Ponadto, $111 = 3 \cdot 37$ oraz 37 jest liczbą pierwszą, więc 37 dzieli n lub 37 dzieli $n + 1$. Rozważmy osobno te przypadki:

1. Jeśli 37 dzieli n , to, skoro $n < 50$, mamy $n = 37$. Wtedy 3 nie dzieli n ani $n + 1$, więc nie może dzielić $\frac{n(n+1)}{2}$. Tym bardziej 111 nie dzieli $\frac{n(n+1)}{2}$, sprzeczność.
2. Jeśli 37 dzieli $n + 1$, to $n = 36$ i obliczamy, że faktycznie $\frac{n(n+1)}{2} = 6 \cdot 111$ jest szukanej postaci.

Odpowiedź: Jediną wartością jest $n = 36$.

Uwaga: jest wiele podobnych poprawnych rozwiązań. Przykładowo, po stwierdzeniu, że $n < 50$ można obliczyć $\frac{n(n+1)}{2}$ dla każdego $n = 1, 2, \dots, 49$. Nie jest to bardzo efektywne, ale poprawne.

2. Liczby pierwsze p, q, r są takie, że liczby p^{q^r} , q^{r^p} oraz r^{p^q} są kwadratami liczb naturalnych. Ile wynosi $p + r + q$? *Odpowiedź dokładnie uzasadnij.*

Uwaga: potęgi są tutaj bez nawiasów, np. $10^{3^2} = 10^9 = 1000000000$.

Rozwiązanie.

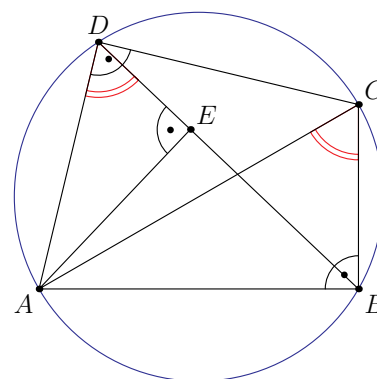
Zauważmy, że dla każdej liczby pierwszej s , potęga s^a jest kwadratem liczby naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy wykładnik a jest liczbą parzystą. Z założeń zadania wynika, że wykładniki q^r , r^p , p^q są parzyste. Zatem również liczby q, r, p są parzyste. Jediną parzystą liczbą pierwszą to dwójka, zatem $q = r = p = 2$ i stąd $p + q + r = 6$.

3. Kąty ABC oraz ADC w czworokącie wypukłym $ABCD$ są proste. Punkt E jest rzutem A na odcinek BD . Pokaż, że kąty EAD oraz CAB mają równe miary.

Rozwiązanie.

Skoro kąty ABC i ADC są proste, to czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o średnicy AC . Kąty ADB oraz ACB tego czworokąta mają równe miary, jako kąty oparte na tym samym łuku. Zatem

$$\begin{aligned}\angle EAD &= 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - \angle ADB \\ &= 90^\circ - \angle ACB = \angle CAB.\end{aligned}$$



4. Na tablicy zapisano $3n$ liczb: n jedynek, n dwójek i n trójek. W każdym ruchu ścieramy dwie ze znajdujących się na tablicy liczb i zapisujemy na tablicy ich iloczyn lub ich sumę (wedle wyboru). Po $3n-1$ krokach na tablicy zostaje jedyna liczba A . Jaką największą liczbę A możemy w ten sposób uzyskać? *Odpowiedź dokładnie uzasadnij. Poprawna odpowiedź bez uzasadnienia będzie oceniana na 2 punkty (w skali do 6 pkt).*

Rozwiązanie.

Założmy, że największa możliwa do osiągnięcia liczba to M . Wybierzmy ciąg ruchów prowadzący do M . Poniżej obserwujemy, że skoro M jest *największą możliwą*, to ciąg ruchów musi spełniać wiele warunków.

Zauważmy najpierw, że możemy uznać, że nigdy nie wykonaliśmy najpierw mnożenia, a potem dodawania. Faktycznie, założmy, że dodaliśmy liczbę c do iloczynu ab . Dało to wynik $ab + c \leq (a + c)b$. Zatem dodanie najpierw, a potem pomnożenie da w ostatecznym rachunku wynik co najmniej M . Skoro tak, to najpierw dokonaliśmy pewnych dodawań, a potem pomnożyliśmy kolejno wszystkie otrzymane liczby; ciąg ruchów można schematycznie przedstawić jako

$$(\star + \star + \dots + \star) \cdot (\star + \star + \dots) \cdot \dots$$

gdzie $\star \in \{1, 2, 3\}$. Przeanalizujemy teraz pojawiające się tutaj nawiasy. Jeśli nawias ma postać $2 + a$ lub $1 + 1 + a$ lub $3 + a$ gdzie $a \geq 2$, to możemy go zamienić na iloczyn $2a$ lub $3a$ nie zmniejszając M . Zatem w każdym nawiasie jest co najwyżej jedna liczba większa niż 1. Innymi słowy, każdy nawias jest postaci: pewna liczba jedynek plus a , gdzie $a \in \{0, 2, 3\}$ i jeśli $a > 0$ to jest co najwyżej jedna jedynka.

Jeśli istnieje nawias, w którym do trójki dodajemy jedynkę to, skoro rozpoczynaliśmy od n dwójek i n jedynek to istnieje co najmniej jeden nawias z samą dwójką. Przenieśmy jedynkę z nawiasu $3 + 1$ powyżej do nawiasu z samą dwójką. Iloczyn tych dwóch nawiasów powiększył się o

$$(2 + 1) \cdot 3 - (3 + 1) \cdot 2 = 1$$

więc łącznie uzyskaliśmy iloczyn większy niż M , co jest niemożliwe. Zatem nie ma nawiasu, w którym do trójki dodajemy jedynkę. Podobnie, jeśli jest nawias, w którym dodajemy do siebie tylko $k \geq 4$ jedynek, to pozostaje k samotnych dwójek. Przenosząc jedną jedynkę do dwójki zmieniamy iloczyn o

$$(k - 1) \cdot 3 - k \cdot 2 = k - 3 \geq 1,$$

czyli powiększamy go wbrew założeniu. Zatem nie ma nawiasów złożonych z więcej niż trzech samotnych jedynek. Skoro

$$(2 + 1) \cdot (2 + 1) > 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \text{oraz} \quad (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (2 + 1) > 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (1 + 1 + 1),$$

to argumentując podobnie jak powyżej, stwierdzamy, że nie ma też nawiasów złożonych z dwóch czy trzech samotnych jedynek. Ale wobec tego pozostają nam tylko nawiasy postaci (3) oraz $(2 + 1)$. Zatem iloczyn wynosi

$$(3)^n \cdot (2 + 1)^n = 3^{2n}.$$

Rozwiązanie, sposób II

Zauważmy, że zawsze warto najpierw dokonać dodawań, a potem mnożyć: dodanie liczby c do iloczynu ab da wynik $ab + c$, który jest liczbą nie większą niż $(a + c)b$. Zatem możemy uznać, że najpierw dokonaliśmy pewnych dodawań, a potem pomnożyliśmy wszystkie otrzymane liczby.

Liczby początkowe sumowały się do $6n$. Po dodawaniach suma liczb nie zmieni się. Rozważmy więc ogólniejsze zadanie: jaki jest największy możliwy iloczyn pewnej liczby liczb całkowitych dodatnich, których suma wynosi $6n$?

Oczywiście, iloczyn 3^{2n} jest możliwy. Pokażemy, że większego iloczynu nie da się uzyskać. Załóżmy, że uzyskanie większego iloczynu jest możliwe, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie m oraz $a_1, \dots, a_m$, że $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 6n$ oraz $a_1 a_2 \dots a_m > 3^{2n}$. Jeśli wśród liczb $a_1, a_2, \dots, a_m$ jest jedynka, to możemy dodać ją do którejś z pozostałych liczb i otrzymać większy iloczyn. Jeśli wśród liczb $a_1, a_2, \dots, a_m$ jest liczba $a_i > 3$, to mamy $2(a_i - 2) = 2a_i - 4 \geq a_i$, więc rozważając zamiast a_i liczby 2 oraz $a_i - 2$ powiększymy iloczyn lub nie zmniejszymy go. Podsumowując, nie zmniejszając iloczynu możemy założyć, że $a_1, \dots, a_m \in \{2, 3\}$. To upraszcza problem: pytamy, jaka jest największa wartość $2^\alpha \cdot 3^\beta$, jeśli α, β są liczbami całkowitymi nieujemnymi takimi, że $2\alpha + 3\beta = 6n$. Jeśli $\alpha > 0$ to $\alpha \geq 3$. Zamieniając $2 \cdot 2 \cdot 2$ w iloczynie na $3 \cdot 3$, zwiększamy go. Zatem można założyć, że $\alpha = 0$. Maksymalny iloczyn wynosi więc 3^{2n} , jak twierdziliśmy.

[pg, jj]