X Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy pierwsze

28 kwietnia 2018 r.

1. Czy dla dowolnych liczb dodatnich x, y istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości x, y oraz $x+y$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Można wybrać x i y takie, że trójkąt o własnościach z zadania nie istnieje.

Przypuśćmy, że trójkąt o polu S i bokach długości a, b, c ma wysokości o długościach x, y i $x+y$. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $x \leqslant y$. Mamy równości

$$ax = by = c(x+y) = 2S,$$

Stąd obliczamy $a = 2S/x$, $b = 2S/y$ oraz $c = 2S/(x+y)$. Ponieważ $a < b + c$ więc $2S/x < 2S/y + 2S/(x+y)$. Oznacza to, że liczby x i y muszą spełniać nierówność:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y}.$$

Jednak np. dla $x = 1$, $y = 2$ powyższa nierówność nie zachodzi.

2. Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych a, b, c spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + abc + b^2 = 1 \\ b^2 + 2abc + c^2 = 2 \\ c^2 + 3abc + a^2 = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Dodając stronami dwa pierwsze równania układu otrzymujemy

$$a^2 + 2b^2 + c^2 + 3abc = 3.$$

Porównując powyższe z trzecim równaniem otrzymujemy

$$a^2 + 2b^2 + c^2 + 3abc = c^2 + 3abc + a^2,$$

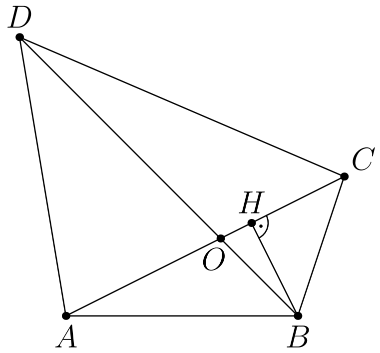
a stąd $2b^2 = 0$, czyli $b = 0$. Z pierwszego równania wynika teraz, że $a^2 = 1$ zaś z drugiego $c^2 = 2$. Dla takich a, c trzecie równanie jest oczywiście spełnione. Ostatecznie istnieją cztery trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające rozważany układ równań:

$$(1, 0, \sqrt{2}), \quad (-1, 0, \sqrt{2}), \quad (1, 0, -\sqrt{2}), \quad (-1, 0, -\sqrt{2}).$$

3. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Dowiedź, że jeśli trójkąty AOB, BOC, COD i DOA mają równe obwody, to $ABCD$ jest rombem.

Rozwiązanie.

Pokażemy, że punkt O jest środkiem każdej z przekątnych czworokąta $ABCD$. Wybierzmy jedną z przekątnych. Ewentualnie zmieniając oznaczenia wierzchołków, możemy założyć, że jest to przekątna AC i że $AO \geqslant CO$. Co najmniej jeden z kątów AOB i AOD nie jest ostry. Ewentualnie zamieniając oznaczenia wierzchołków B i D możemy założyć, że $\sphericalangle AOB \geqslant 90°$. Wtedy rzut punktu B na AC leży na półprostej OC, patrz rysunek.



Zatem $AH \geqslant CH$, więc

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \geqslant CH^2 + BH^2 = BC^2,$$

czyli $AB \geqslant BC$. Obwód trójkąta AOB wynosi $AO + OB + AB$. Odwód trójkąta BOC wynosi $CO + OB + BC$. Z warunków zadania wynika, że

$$AO + OB + AB = CO + OB + BC,$$

stąd $AO + AB = CO + BC$. Pokazaliśmy, że $AB \geqslant BC$ oraz $AO \geqslant CO$. Z równości powyżej wynika zatem $AB = BC$ i $AO = CO$. W szczególności, punkt O jest środkiem przekątnej AC. Przeprowadzamy to samo rozumowanie dla drugiej przekątnej i stwierdzamy, że $BO = DO$. Obwód każdego z trójkątów AOB, BOC, COD, DOA składa się z połowy każdej z przekątnych oraz z boku AB, BC, CD, DA odpowiednio. Skoro te odwody są równe, to $AB = BC = CD = DA$, więc $ABCD$ jest rombem.

Uwaga: kluczowy krok rozwiązania to początek: odpowiednia zamiana oznaczeń wierzchołków tak, by otrzymać $AO \geqslant CO$ oraz $\sphericalangle AOB \geqslant \sphericalangle COB$.

Sposób II

Rozważania o punkcie H w powyższym rozwiązaniu są dość subtelne. Przy oznaczeniach z poprzedniego rozwiązania pokażemy, jak udowodnić nierówność $AB \geqslant BC$ bez odwoływania się do H. Niech $\alpha := \sphericalangle AOB$. Skoro $\alpha \geqslant 90°$, to $\cos(\alpha) \leqslant 0$, więc $-\cos(\alpha) \geqslant 0$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AOB wynika, że

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos(\alpha) \geqslant AO^2 + BO^2. \tag{1}$$

Podobnie, $\sphericalangle BOC \leqslant 90°$, więc $\cos(\sphericalangle BOC) \geqslant 0$ i z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BOC wynika, że

$$BC^2 = CO^2 + BO^2 - 2 \cdot BO \cdot CO \cdot \cos(\sphericalangle BOC) \leqslant CO^2 + BO^2. \tag{2}$$

Łącząc nierówności (1) i (2) oraz nierówność $AO \geqslant CO$, stwierdzamy, że

$$AB^2 \geqslant AO^2 + BO^2 \geqslant CO^2 + BO^2 \geqslant BC^2,$$

więc $AB \geqslant BC$. Dalej postępujemy jak w rozwiązaniu powyżej.

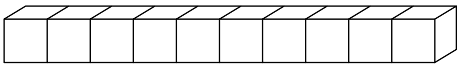
4. Pewna liczba klocków w kształcie sześcianików $1 \times 1 \times 1$ jest sklejona ścianami, tworząc bryłę o polu powierzchni N. Które z liczb naturalnych $N \geqslant 13$ mogą być w ten sposób otrzymane?

Rozwiązanie.

Pokażemy, że $N \geqslant 13$ może być otrzymane jako pole powierzchni wtedy i tylko wtedy, gdy N jest parzyste.

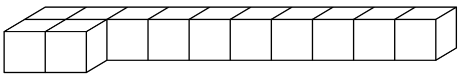
Załóżmy najpierw, że N jest polem powierzchni pewnej bryły $\mathcal{B}$. Bryła ta powstaje przez doklejanie kolejnych sześcianików. Prześledźmy, jak zmienia się pole powierzchni przy każdym doklejeniu. Załóżmy, że doklejony sześcianik ma i ścian wspólnych z bryłą $\mathcal{C}$ złożoną z pozostałych sześcianików. Po doklejeniu sześcianika i ścian bryły $\mathcal{C}$ zostanie zakrytych, zaś pojawi się dodatkowych $6 - i$ ścian pochodzących od doklejonego sześcianika. Wobec tego pole powierzchni bocznej zmieni się (zwiększy lub zmaleje) o $6 - 2i$. Zatem parzystość pola powierzchni nie zmienia się przy doklejaniu. Dla bryły złożonej z jednego sześcianika pole powierzchni jest parzystą liczbą (równą 6). Tak więc *dla każdej bryły pole powierzchni jest liczbą parzystą.*

Załóżmy teraz, że $N \geqslant 13$ jest liczbą parzystą. Wtedy $N = 4k$ lub $N = 4k + 2$ dla pewnego k całkowitego dodatniego. Pokażmy najpierw, jak uzyskać $N = 4k + 2$. W tym celu rozważmy figurę $\mathcal{B}$ złożoną z rzędu k sześcianików, jak na rysunku poniżej (dla $k = 10$):



Pole powierzchni $\mathcal{B}$ wynosi $4k + 2$.

Pokażmy teraz, jak uzyskać $N = 4k$. Skoro $N \geqslant 13$, to $k \geqslant 4$. Zbudujmy bryłę $\mathcal{B}'$ złożoną z rzędu $k - 2$ sześcianików oraz dwóch sześcianików doklejonych do nich, jak na rysunku poniżej (dla $k = 12$)



Pole powierzchni bryły złożonej z rzędu $k - 2$ sześcianików to $4(k - 2) + 2$. Pole powierzchni rzędu złożonego z 2 sześcianików to $4 \cdot 2 + 2 = 10$. Sklejamy (dwoma ściankami wspólnymi) rząd dwóch sześcianików z rzędem $k - 2$ sześcianików i otrzymujemy bryłę o polu powierzchni $(4(k - 2) + 2) + (4 \cdot 2 + 2) - 2 \cdot 2 = 4k$. Pokazaliśmy więc, że każdą liczbę parzystą $N \geqslant 13$ można otrzymać jako pole powierzchni bocznej.

Uwaga 1: niezbyt trudno przekonać się doświadczalnie, że nie da się otrzymać pola powierzchni bocznej $N = 12$ czy też $N = 8$. Ale formalny dowód, że się nie da jest dość nudny i długi. Stąd ograniczenie z zadania.

Uwaga 2: W rozwiązaniu przyjęliśmy, że pole powierzchni bocznej wlicza „niewidoczne” ściany, które są ścianami w „dziurach” w bryle. Gdyby przyjąć, że pole powierzchni nie uwzględnia tych ścian, wynik i rozumowanie w rozwiązaniu nie zmieni się, bo pole powierzchni w każdej z dziur jest parzyste na mocy rozumowania powyżej.

[*pg, jj*]