IX Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

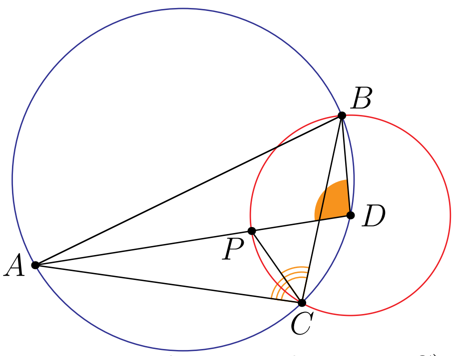
Rozwiązania - klasy pierwsze

20 maja 2017 r.

1. Punkt A leży na okręgu o, zaś punkt P w jego wnętrzu. Prosta AP przecina okrąg o jeszcze w punkcie D. Okrąg o środku w D i promieniu DP przecina okrąg o w punktach B i C. Udowodnij, że punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Rozwiązanie.

Kąty ADB i ACB są oparte na tym samym łuku okręgu opisanego na trójkącie ABC, zatem $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$. Kąt PCB jest wpisany w łuk okręgu opisanego na BCP. Kątem środkowym opartym na tym samym łuku jest PDB, więc $\sphericalangle PDB = 2\sphericalangle PCB$. Łącznie,



$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle PDB = 2\sphericalangle PCB,$$

więc PC jest dwusieczną kąta ACB. Analogicznie (zamieniając rolami punkty B i C) dowodzimy, że PB jest dwusieczną kąta ABC. Stąd P jest przecięciem dwusiecznych w trójkącie ABC, a więc środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

2. Znajdź wszystkie trójki liczb całkowitych a, b, c, spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^3 = c^4 \\ b^2 + c^3 = a^4 \\ c^2 + a^3 = b^4. \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Pokażemy najpierw, że

$$|a|, |b|, |c| \leqslant 1. \tag{1}$$

Załóżmy, że a ma największą wartość bezwzględną spośród a, b, c. Z drugiego równania wynika, że

$$a^4 = b^2 + c^3 \leqslant a^2 + |a|^3.$$

Jeżeli wartość bezwzględna a jest większa od 1, to

$$a^4 \geqslant 2|a|^3 = |a|^3 + |a|^3 \geqslant 2a^2 + |a|^3 > a^2 + |a|^3,$$

czyli sprzeczność z nierównością powyżej. Zatem $|a| \leqslant 1$ i (1) jest spełniona. To samo rozumowanie pokazuje, że jeżeli b lub c ma największą wartość bezwzględną, to (1) jest spełniona. Zatem udowodniliśmy nierówność (1).

Z równania $a^2 + b^3 = c^4$ wynika, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest parzysta. Na mocy (1) świadczy to, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest zerem.

Załóżmy najpierw, że $a = 0$. Wtedy $b^3 = c^4$, $b^2 + c^3 = 0$ i $c^2 = b^4$. Zatem $c = 0$ i $b = 0$ lub $c = -1$ i $b = 1$. Analogiczne rozumowanie dla przypadku $b = 0$ lub $c = 0$ pokazuje, że istnieją cztery rozwiązania

$$(a,b,c) = (0,0,0), \quad (a,b,c) = (0,1,-1), \quad (a,b,c) = (-1,0,1), \quad (a,b,c) = (1,-1,0).$$

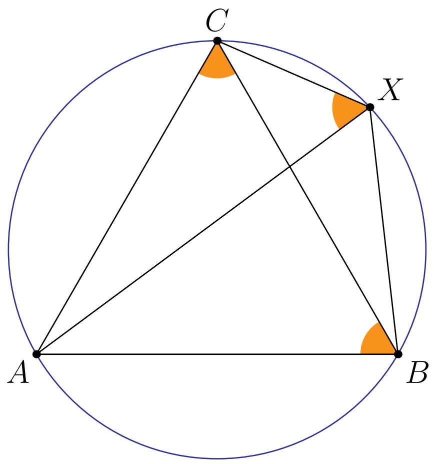
3. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Dla których punktów X okręgu opisanego na ABC suma

$$|AX| + |BX| + |CX|$$

jest najmniejsza? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez a długość boku trójkąta ABC. Zauważmy, że dla $X = A, B, C$ suma odległości wynosi $2a$. Pokażemy, że dla każdego innego X suma ta jest większa. Załóżmy, że X leży na łuku BC. Wtedy $\sphericalangle CXA = 60°$, zaś $\sphericalangle XAC < 60°$, czyli kąt XCA jest największym kątem trójkąta ACX. Tym samym AX jest najdłuższym bokiem tego trójkąta, więc $|AX| > |AC| = a$. Ponadto z nierówności trójkąta wynika, że



$$|BX| + |CX| > |BC| = a,$$

czyli $|AX| + |BX| + |CX| > 2a$. Dla X na łuku CA lub AB rozumowanie jest analogiczne.

4. W pola kwadratowej tablicy 2017×2017 wpisano liczby $1, 2, 3, \ldots, 2017$ w ten sposób, że

1. w każdym wierszu każda z tych liczb występuje dokładnie raz,
2. w każdą parę pól symetrycznych względem głównej przekątnej wpisano równe liczby.

Wykaż, że w każde dwa pola leżące na głównej przekątnej wpisano różne liczby.

Uwaga: główna przekątna to przekątna złożona z 2017 pól, biegnąca od „lewego górnego" rogu tablicy, do jej „prawego dolnego" rogu.

Rozwiązanie.

Weźmy $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$. Z pierwszego warunku wynika, że liczba n występuje w tablicy 2017 razy. Z drugiego warunku wynika, że liczba n występuje tyle samo razy nad przekątną, co pod przekątną. Zatem *poza przekątną* liczba n występuje *parzyście* wiele razy. Liczba 2017 jest nieparzysta, więc n występuje co najmniej raz na przekątnej.

Przekątna ma 2017 pól i każda z 2017 liczb występuje na niej, więc liczby wpisane w przekątną są różne.

[*pg, jj*]