

VI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy pierwsze

17 maja 2014 r.

1. Liczby a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 są całkowite, zaś funkcja $f(x)$ jest określona wzorem

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Wykazać, że jeśli $f(0)$ i $f(1)$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to nie istnieje liczba całkowita m taka, że $f(m) = 0$.

I rozwiązanie

Z założeń wynika, że $f(0) = a_0$ oraz $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ są liczbami nieparzystymi. Zauważmy teraz, że jeśli m jest liczbą parzystą, to $a_i m^i$ są liczbami parzystymi dla $i = 1, 2, 3, 4$, a więc $f(m)$ jest liczbą nieparzystą jako suma liczb parzystych oraz a_0 . W szczególności $f(m) \neq 0$. Przypuśćmy, teraz że m jest liczbą nieparzystą tzn. $m = 2k + 1$ dla pewnej liczby całkowitej k . Zauważmy teraz, że $a_i(2k + 1)^i - a_i$ są liczbami parzystymi dla $i = 1, 2, 3, 4$. Z łatwością obliczamy bowiem

$$a_1(2k + 1) - a_1 = 2a_1k,$$

$$a_2(2k + 1)^2 - a_2 = 4a_2k^2 + 4a_2k,$$

$$a_3(2k + 1)^3 - a_3 = 8a_3k^3 + 12a_3k^2 + 6a_3k,$$

$$a_4(2k + 1)^4 - a_4 = 16a_4k^4 + 32a_4k^3 + 24a_4k^2 + 8a_4k.$$

Wynika stąd, że jeśli m jest liczbą nieparzystą, to

$$f(m) - f(1) = (a_4m^4 - a_4) + (a_3m^3 - a_3) + (a_2m^2 - a_2) + (a_1m - a_1)$$

jest liczbą parzystą. Z nieparzystości $f(1)$ wynika teraz nieparzystość liczby $f(m)$, a więc $f(m) \neq 0$.

II rozwiązanie

Powyższe rozwiązanie można zapisać łatwiej, używając języka kongruencji. Przypomnijmy, że piszemy $a_1 \equiv a_2 \pmod{2}$, jeżeli a_1 i a_2 dają tę samą resztę z dzielenia przez 2. Prawdą jest, że jeżeli $a_1 \equiv a_2 \pmod{2}$ i $b_1 \equiv b_2 \pmod{2}$, to $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{2}$ oraz $a_1b_1 \equiv a_2b_2 \pmod{2}$.

Niech m będzie dowolną liczbą całkowitą. Zapiszmy m w postaci $m = 2q + r$, gdzie q i r są liczbami całkowitymi oraz $r \in \{0, 1\}$. Wtedy $m \equiv r \pmod{2}$, więc również

$$m^2 \equiv r^2 \pmod{2}, \quad m^3 \equiv r^3 \pmod{2} \quad \text{oraz} \quad m^4 \equiv r^4 \pmod{2}.$$

Wobec tego $a_1m \equiv a_1r \pmod{2}$, $a_2m^2 \equiv a_2r^2 \pmod{2}$, $a_3m^3 \equiv a_3r^3 \pmod{2}$ oraz $a_4m^4 \equiv a_4r^4 \pmod{2}$. Łącznie otrzymujemy

$$f(m) = a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0 \equiv a_4r^4 + a_3r^3 + a_2r^2 + a_1r + a_0 = f(r) \pmod{2}.$$

Skoro liczba $f(r)$ jest z założenia nieparzysta, to liczba $f(m)$ jest również nieparzysta, więc $f(m) \neq 0$. To kończy dowód.

III rozwiązanie

Liczba $a_0 = f(0)$ jest nieparzysta. Zauważmy, że jeśli $m = 2q$ jest liczbą całkowitą parzystą, to $f(m) = a_4(2q)^4 + a_3(2q)^3 + a_2(2q)^2 + a_1(2q) + a_0$ jest również nieparzysta.

Rozważmy teraz funkcję $g(x) = f(x+1)$. Wtedy $g(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ dla pewnych liczb całkowitych b_4, b_3, b_2, b_1, b_0 . Skoro $g(0) = f(1)$ jest nieparzysta, to, rozumując jak powyżej, dla dowolnego k całkowitego liczba $g(2k)$ jest nieparzysta. Ale $g(2k) = f(2k+1)$, więc $f(2k+1)$ jest nieparzysta dla dowolnego k .

Łącznie, liczba $f(m)$ jest nieparzysta dla dowolnego m całkowitego, więc nie istnieje całkowite m takie, że $f(m) = 0$.

2. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną m taką, że wśród dowolnych kolejnych m liczb całkowitych dodatnich istnieje liczba o sumie cyfr podzielnej przez 10. Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą o sumie cyfr podzielnej przez 10 jest 19. Wynika stąd, że $m \geq 19$. Udowodnimy, że wśród dowolnych 19 kolejnych dodatnich liczb całkowitych

$$m, m+1, m+2, \dots, m+9, \dots, m+18$$

istnieje liczba o sumie cyfr podzielnej przez 10. Zauważmy, że wśród pierwszych dziesięciu liczb $m, m+1, \dots, m+9$ jest dokładnie jedna, której ostatnią cyfrą (cyfrą jedności) jest 0. Niech będzie to liczba $m+k$, gdzie $0 \leq k \leq 9$. Oznaczmy przez $S(x)$ sumę cyfr liczby całkowitej x . Ponieważ cyfrą jedności $m+k$ jest zero, więc dla $i = 1, 2, \dots, 9$ mamy zależność $S(m+k+i) = S(m+k) + i$. Ciąg

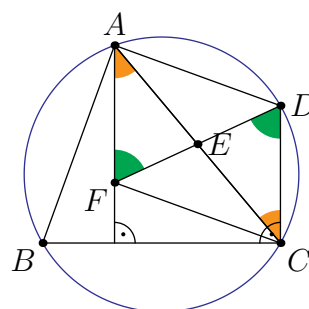
$$S(m+k), S(m+k+1), S(m+k+2), \dots, S(m+k+9)$$

jest więc ciągiem kolejnych dziesięciu dodatnich liczb całkowitych. Wśród nich jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 10.

3. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC , zaś punkt E jest środkiem odcinka AC . Prosta OB przecina okrąg opisany na ABC po raz drugi w punkcie D , zaś prosta DE przecina wysokość opuszczoną z punktu A w punkcie F . Uzasadnić, że E jest środkiem odcinka DF .

I rozwiązanie

Skoro cięciwa BD przechodzi przez O , to jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC , więc $\angle DCB = 90^\circ$. To oznacza, że prosta CD jest prostopadła do BC , zatem proste CD i AF są równoległe. Z właściwości kątów naprzemianległych wynika, że $\angle DCE = \angle FAE$ oraz $\angle CDE = \angle AFE$, więc trójkąty DCE i AFE są podobne na mocy cechy kąt-kąt-kąt.



II rozwiązanie

4. Dla każdej niezerowej liczby całkowitej z przez $d(z)$ oznaczamy liczbę dzielników całkowitych liczby z większych od 1. Ponadto zakładamy, że $d(0) = 0$.

$$(x+d(y), y+d(x)), \quad (x+d(y), y-d(x)), \quad (x-d(y), y+d(x)), \quad (x-d(y), y-d(x)).$$

Rozwiązanie.

Pokażemy, że robot nie może przejść z punktu $(5, 2014)$ do punktu $(0, 0)$. Załóżmy, że takie przejście jest możliwe i niech $(a, b) \neq (0, 0)$ będzie punktem, z którego robot bezpośrednio przechodzi do punktu $(0, 0)$. Wtedy zachodzi $0 = a - d(b)$ lub $0 = a + d(b)$, więc $|a| = |d(b)|$. Podobnie, $0 = b - d(a)$ lub $0 = b + d(a)$, więc $|b| = |d(a)|$. Mamy ciąg nierówności

$$|a| \geq |d(a)| = |b| \geq |d(b)| = |a|,$$

więc $|a| = |d(a)| = |b| = |d(b)|$. Z uwagi na początku rozwiązania wynika wtedy, że $a = b = 0$. Sprzeczność!