



XV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy drugie

18 marca 2023 r.

1. Wyznacz wszystkie trzycyfrowe liczby całkowite dodatnie $\overline{abc}$ takie, że

$$2 \cdot \overline{abc} = \overline{cab} + \overline{bca}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Równanie z zadania możemy przepisać jako $200a + 20b + 2c = 110c + 11a + 101b$, czyli $189a - 81b - 108c = 0$. Skoro $189 = 81 + 108$, to możemy dalej zapisać to jako $108(a - c) - 81(b - a) = 0$, czyli $108(a - c) = 81(b - a)$. Dzieląc stronami przez 27, otrzymujemy $4(a - c) = 3(b - a)$. Dodając do obu stron $3(a - c)$, dostajemy wreszcie

$$7(a - c) = 3(b - c). \quad (1)$$

Skoro $0 \leq b, c \leq 9$, to $-9 \leq b - c \leq 9$. Liczba $b - c$ jest podzielna przez 7, więc mamy trzy przypadki.

1. $b - c = -7$. W tym przypadku $b = c - 7$. Z równania (1) otrzymujemy też $7(a - c) = -21$, więc $a = c - 3$. Skoro $b \geq 0$ i $b = c - 7$, to $c \geq 7$. Mamy więc trzy przypadki $c = 7, 8, 9$ i odpowiadające im rozwiązania $\overline{abc} = 407, 518, 629$.
2. $b - c = 0$. Z równania (1) wynika, że $a - c = 0$, zatem $a = b = c$. To daje dziewięć rozwiązań $\overline{abc} = 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999$.
3. $b - c = 7$. Z równania (1) wynika, że $a - c = 3$. Skoro $b \leq 9$ oraz $b - c = 7$, to $c \leq 2$. Mamy tu trzy przypadki $c = 0, 1, 2$ i odpowiadające im rozwiązania $\overline{abc} = 370, 481, 592$.

Odpowiedź: Łącznie jest 15 takich liczb, są to 111, 222, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 777, 888, 999.

2. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ należą do przedziału $[-1, 1]$ i ich suma jest równa 1. Wyznacz możliwie największą wartość sumy kwadratów $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2023}^2$.

Rozwiązanie.

Jeśli $x \in [-1, 1]$ to $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \leq 0$, zatem $x^2 \leq 1$. Wynika stąd, że $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2023}^2 \leq 2023 \cdot 1 = 2023$. Ponadto biorąc $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1, \dots, a_{2022} = -1, a_{2023} = 1$ otrzymujemy 1012 jedynek i 1011 minus jedynek, więc suma wynosi 1, zaś suma kwadratów 2023.

Odpowiedź: Największa możliwa wartość sumy kwadratów wynosi 2023.

3. Wybrano 33 różne liczby całkowite dodatnie, przy czym żadna z nich nie ma dzielnika pierwszego większego od 11. Wykaż, że wśród wybranych liczb istnieją dwie różne liczby x, y takie, że xy jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie.

Każda z wybranych liczb jest postaci $2^{e_2}3^{e_3}5^{e_5}7^{e_7}11^{e_{11}}$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych $e_2, e_3, e_5, e_7, e_{11}$. Liczbie tej przyporządkowujemy ciąg $(r_2, r_3, r_5, r_7, r_{11})$, gdzie r_i jest resztą z dzielenia e_i przez dwa, dla $i = 2, 3, 5, 7, 11$. Z definicji każda liczba r_i należy do zbioru $\{0, 1\}$. Zatem można w ten sposób otrzymać najwyżej $2^5 = 32 < 33$ różnych ciągów. To oznacza, że pewnym dwóm liczbom

$$x = 2^{e_2}3^{e_3}5^{e_5}7^{e_7}11^{e_{11}}, \quad y = 2^{e'_2}3^{e'_3}5^{e'_5}7^{e'_7}11^{e'_{11}}$$

spośród wybranych przyporządkowano ten sam ciąg. Stąd dla każdego $i = 2, 3, 5, 7, 11$ liczba 2 dzieli $e_i - e'_i$. Zatem 2 dzieli również $e_i - e'_i + 2e'_i = e_i + e'_i$. Zapiszmy $e_i + e'_i = 2k_i$, gdzie k_i jest liczbą całkowitą nieujemną. Wtedy

$$xy = 2^{e_2+e'_2}3^{e_3+e'_3}5^{e_5+e'_5}7^{e_7+e'_7}11^{e_{11}+e'_{11}} = (2^{k_2}3^{k_3}5^{k_5}7^{k_7}11^{k_{11}})^2$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

4. Na płaszczyźnie wybrano 2023 punkty w ten sposób, że dla dowolnych trzech punktów A, B, C spośród wybranych zachodzi nierówność $AB \neq AC$. Następnie połączono odcinkiem każdy punkt z punktem mu najbliższym. Jaka jest możliwie największa liczba odcinków wychodzących z jednego punktu? Odpowiedź uzasadnij.

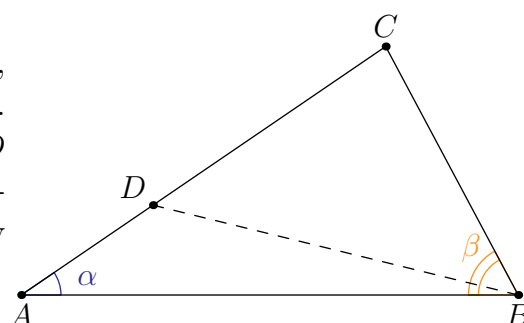
Rozwiązanie.

Pokażemy najpierw następującą własność trójkąta.

Lemat 1. Jeśli α, β, γ są miarami kątów trójkąta zaś a, b, c są kolejnymi długościami boków trójkąta na których te kąty są oparte, to nierówność $a < b$ jest równoważna nierówności $\alpha < \beta$.

Dowód.

Oznaczmy wierzchołki trójkąta przez A, B, C tak, że $a = |BC|$, $b = |CA|$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$. Jeśli $a < b$, to oznaczmy na boku AC punkt D taki, że $|CD| = |BC|$. Trójkąt CBD jest równoramienny, zatem $\angle BCD = \angle CBD$. Obliczamy wtedy, że

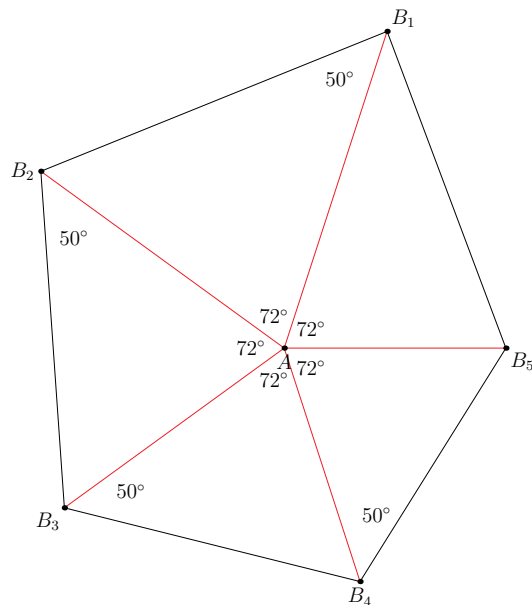


$$\beta = \angle CBA > \angle CBD = \angle CDB = 180^\circ - \angle ADB = \angle DAB + \angle DBA > \alpha.$$

Jeśli zaś $\alpha < \beta$, to wypuśćmy wewnątrz trójkąta ABC z wierzchołka B półprostą BX taką, że $\angle ABX = \frac{\beta - \alpha}{2}$. Niech D będzie punktem przecięcia BX z bokiem AC . Wtedy $\angle ADB = 180^\circ - \alpha - (\beta - \alpha)/2 = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, więc $\angle CDB = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \beta - \frac{\beta - \alpha}{2} = \angle CBD$. To pokazuje, że trójkąt BCD jest równoramienny, więc $a = |BC| = |CD| < |CA| = b$. $\square$

Wróćmy do rozwiązywania zadania. Udowodnimy, że z jednego punktu może wyjść co najwyżej 5 innych odcinków. Przypuśćmy przeciwnie, że pewien punkt A jest połączony z przynajmniej sześcioma innymi punktami $A_1, A_2, \dots, A_n$, gdzie $n \geq 6$. Wówczas przynajmniej jeden z kątów $\sphericalangle A_i A A_{i+1}$ ma miarę nie przekraczającą 60° . Wówczas w trójkącie $AA_i A_{i+1}$ największą miarę ma albo $\sphericalangle AA_i A_{i+1}$ albo $\sphericalangle AA_{i+1} A_i$; nie może być dwóch kątów o równej mierze, bo boki $AA_i A_{i+1}$ są parami różnej długości. Jeśli największą miarę ma kąt $\sphericalangle AA_i A_{i+1}$, to na mocy powyższej własności trójkąta mamy nierówności $|AA_{i+1}| > |AA_i|$ oraz $|AA_{i+1}| > |A_i A_{i+1}|$. Pierwsza z nich oznacza, że A_{i+1} nie jest najbliższym punktem dla A , a druga, że A nie jest najbliższym punktem dla A_{i+1} . Ale odcinek AA_{i+1} został narysowany, sprzeczność. Z tych samych powodów największej miary nie może mieć kąt $\sphericalangle AA_{i+1} A_i$.

Może się zdarzyć, że z jednego punktu wyjdzie 5 odcinków. W tym celu należy na przykład umieścić sześć punktów $A, B_1, \dots, B_5$ tak, by $\sphericalangle B_1 A B_2 = \sphericalangle B_2 A B_3 = \sphericalangle B_3 A B_4 = \sphericalangle B_4 A B_5 = \sphericalangle B_5 A B_1 = 72^\circ$ i by kąty $\sphericalangle A B_i B_{i+1}$ miały miary bliskie $54^\circ = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2}$, ale nie dokładnie 54° . Na rysunku obok użyliśmy 50° . Pozostałe punkty umieszczamy dowolnie, daleko od punktów $A, B_1, \dots, B_5$. Korzystając wielokrotnie z lematu powyżej, stwierdzamy, że A jest punktem najbliższym punktowi B_1 , punktowi B_2 , punktowi B_3 i punktowi B_4 , zaś punkt B_5 jest najbliższy punktowi A . To pokazuje, że A jest połączony z pięcioma punktami.



[pg, jj]