



XII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy drugie

12 czerwca 2021 r.

1. Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta, przy czym $|AB| > |AC| > |BC|$. Ile jest punktów D takich, że czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D ma oś symetrii? *Odpowiedź dokładnie uzasadnij.*

Rozwiązanie.

Założmy najpierw, że ABC nie jest trójkątem prostokątnym. Rozważmy najpierw ogólnie oś symetrii ℓ czworokąta $ABCD$. Są możliwe dwie sytuacje: oś ℓ przechodzi przez dokładnie dwa wierzchołki czworokąta $ABCD$ albo oś ℓ nie przechodzi przez wierzchołek czworokąta $ABCD$.

1. Rozważmy pierwszą z sytuacji. Są tu dwa podprzypadki:

- (a) Oś ℓ przechodzi przez punkt D i jeden z punktów A, B, C , np. przez punkt A . Wtedy odbicie względem osi ℓ zamienia punkty B i C . Wynika stąd, że $|AB| = |BC|$, sprzeczność z warunkiem zadania. Zatem ta sytuacja nie jest możliwa.
- (b) Oś ℓ przechodzi przez dwa z punktów A, B, C , np. przez A i B . Ta sytuacja jest możliwa do uzyskania: wystarczy dobrać D jako odbicie punktu C względem AB . W ten sposób możemy uzyskać co najwyżej **trzy** różne punkty D , bo wybieramy tu dwa z trzech punktów A, B, C .

2. Rozważmy drugą z sytuacji. Możemy pogrupować punkty A, B, C, D w pary: punkt i jego odbicie względem ℓ . Do jednej z tych par trafią dwa punkty z $\{A, B, C\}$, np. A i B . To znaczy, że ℓ jest symetralną boku AB , zaś D jest odbiciem punktu C względem tej symetralnej. Ponownie, w ten sposób możemy uzyskać co najwyżej **trzy** punkty D .

Wykazaliśmy, że jest co najwyżej 6 możliwych punktów D . Pozostaje wykazać, że zbudowane tak punkty D są parami różne. Gdyby nie, to okazałoby się, że pewien punkt D uzyskaliśmy na dwa sposoby. Ale to znaczyłoby, że czworokąt $ABCD$ dla tego punktu ma *dwie różne* osie symetrii, jest więc rombem lub prostokątem. Jeśli trójkąt ABC można byłoby uzupełnić do rombu $ABCD$, wtedy dwa z boków tego trójkąta byłyby bokami rombu, więc miałyby równe długości wbrew założeniu. Jeśli ABC można byłoby uzupełnić do prostokąta $ABCD$, to byłby on trójkątem prostokątnym, sprzeczność.

W przypadku trójkąta prostokątnego dwa z punktów powyżej pokrywają się, zatem jest 5 możliwych punktów D .

2. Liczby rzeczywiste a, b, c są takie, że układ równań

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ bx^2 + cx + a = 0 \\ cx^2 + ax + b = 0 \end{cases}$$

ma rozwiązanie całkowite x . Udowodnij, że $a + b + c = 0$.

Rozwiązanie.

Założmy, że $a + b + c \neq 0$ a mimo to rozwiązanie całkowite x istnieje. Zsumowanie równań z układu daje równanie

$$(a + b + c) \cdot (x^2 + x + 1) = 0,$$

z którego wynika, że $x^2 + x + 1 = 0$. Liczba całkowita x dzieli więc jedynkę, a zatem $x = 1$ lub $x = -1$, ale żadna z tych liczb nie spełnia równania $x^2 + x + 1 = 0$. Sprzeczność.

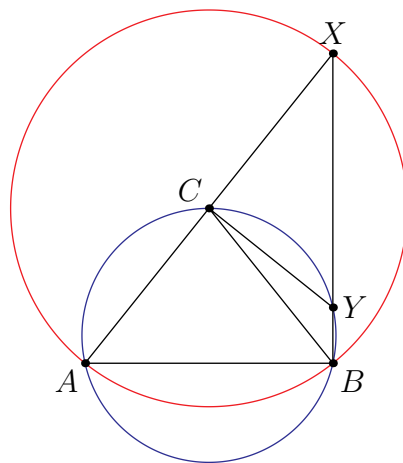
3. W trójkącie ABC długości boków AC i BC są równe. Punkt X jest odbiciem punktu A względem C . Odcinek XB przecina okrąg opisany na ABC w punkcie Y . Uzasadnij, że kąt YCX jest prosty.

Rozwiązanie.

Z założenia punkt C leży w równej odległości od A, B i X , jest więc środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABX . Kąt ABX jest oparty na średnicy tego okręgu, jest więc prosty.

Punkt Y leży na okręgu opisanym na ABC , więc czworokąt $ABYC$ jest wpisany w okrąg. Zatem kąty ABY oraz ACY sumują się do 180° . Skoro ABY jest prosty, to ACY także. Zatem XCX jest również kątem prostym, co należało wykazać.

Uwaga: ściśle mówiąc, trzeba osobno rozpatrzyć jeszcze przypadek, gdy $Y = B$, czyli gdy prosta BX jest styczna do okręgu w B . W tym przypadku $\angle ACY = 90^\circ$ wynika z twierdzenia o stycznej i cięciwie.



4. Danych jest 100 patyczków o długościach naturalnych. Wiadomo, że suma ich długości nie jest podzielna przez 2021. Ustal, ile najwięcej różnych liczb podzielnych przez 2021 można ułożyć z tych patyczków.

Mówimy, że liczbę n można ułożyć z patyczków, jeśli suma długości pewnej części z nich jest równa n . Umawiamy się, że liczbę 0 zawsze można ułożyć z patyczków.

Rozwiązanie.

Skoro suma długości patyczków jest niepodzielna przez 2021 to istnieje patyczek o długości niepodzielnej przez 2021. Nazwijmy go p , a pozostałe patyczki oznaczmy przez $r_1, \dots, r_{99}$. Liczby, które można ułożyć z tych patyczków, są postaci

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_{99} r_{99} + bp,$$

gdzie $a_i \in \{0, 1\}$ oraz $b \in \{0, 1\}$. Wobec tego wszystkich liczb, które można ułożyć jest co najwyżej tyle, ile wyborów a_i, b czyli 2^{100} . Skoro p jest niepodzielna przez 2021 to dla dowolnych $a_1, \dots, a_{99}$ co najwyżej jedna z dwóch liczb

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \dots + a_{99}r_{99} + 0 \cdot p \quad \text{oraz} \quad a_1r_1 + a_2r_2 + \dots + a_{99}r_{99} + 1 \cdot p$$

jest podzielna przez 2021. Zatem liczb podzielnych przez 2021 można ułożyć co najwyżej $2^{100}/2 = 2^{99}$. Pokażemy, że tyle liczb można ułożyć. Wybierzmy patyczki o długościach $p = 1, r_i = 2021 \cdot 10^i$ dla $i = 1, 2, \dots, 99$. Dla każdych $a_1, \dots, a_{99}$ liczba

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \dots + a_{99}r_{99} \tag{1}$$

jest podzielna przez 2021. Wyborów a_i jest 2^{99} , więc wystarczy pokazać, że każde dwa różne wybory dają różne liczby. Gdyby nie, to znaczyłoby, że pewną liczbę m można ułożyć z patyczków $r_1, \dots, r_{99}$ na dwa sposoby. Ale wtedy $\frac{m}{2021}$ można byłoby ułożyć z patyczków o długościach $10, 10^2, \dots, 10^{99}$ na dwa sposoby, czyli miałaby ona dwa różne zapisy dziesiętne. Sprzeczność. Dowiedliśmy, że wszystkie liczby uzyskane w postaci (1) są parami różne, zatem można ułożyć 2^{99} różnych liczb. To kończy dowód.

[pg, jj]