IX Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy drugie

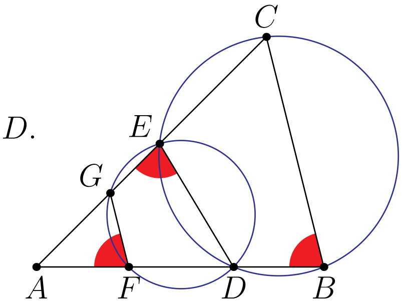
20 maja 2017 r.

1. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o przechodzi przez punkty B i C oraz przecina odcinek AB w D zaś odcinek AC w E. Okrąg o_2 przechodzi przez punkty D i E i przecina odcinki AD, AE jeszcze punktach w F, G odpowiednio. Pokaż, że odcinki FG i BC są równoległe.

Rozwiązanie.

Czworokąt $BCED$ jest wpisany w okrąg, więc sumy jego przeciwległych kątów są równe i wynoszą $180°$. Tak więc

$$\sphericalangle DEG = 180° - \sphericalangle CED = 180° - (180° - \sphericalangle CBD) = \sphericalangle CBD.$$



Czworokąt $DEGF$ jest również wpisany w okrąg, więc analogicznie otrzymujemy, że $\sphericalangle DEG = \sphericalangle GFA$. Stąd $\sphericalangle CBD = \sphericalangle GFA$. Oznacza to, że odcinki BC i FG są równoległe.

2. Dla pewnej liczby pierwszej $p > 3$ oraz liczby naturalnej n liczba p^n ma w zapisie dziesiętnym 100 cyfr. Dowiedź, że pewna cyfra powtarza się przynajmniej 11 razy.

Rozwiązanie.

Gdyby każda spośród dziesięciu cyfr $0, 1, \ldots, 9$ występowała w zapisie dziesiętnym 100-cyfrowej liczby p^n mniej niż jedenaście razy, to każda z nich występowałaby dokładnie dziesięć razy. Suma cyfr liczby p^n byłaby równa

$$10(0 + 1 + 2 + \ldots + 8 + 9) = 10 \cdot 45 = 450,$$

a więc byłaby podzielna przez 3. Liczba p^n byłaby zatem podzielna przez 3, co przy założeniu $p > 3$ jest niemożliwe.

3. Danych jest dziesięć liczb naturalnych $10 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{10} \leqslant 150$. Wykaż, że dla pewnych $i < j$ zachodzi nierówność:

$$\frac{a_j}{a_i} \leqslant \frac{4}{3}.$$

Rozwiązanie.

Przypuśćmy, że dla wszystkich $1 \leqslant i < j \leqslant 10$ zachodzą nierówności

$$\frac{a_j}{a_i} > \frac{4}{3}.$$

W szczególności $a_{i+1} > \frac{4}{3}a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 9$. Ponieważ liczby a_i są naturalne więc dla $i = 1, 2, \ldots, 9$ zachodzić muszą nierówności

$$a_{i+1} \geqslant \left[\frac{4}{3}a_i\right] + 1,$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, czyli największą liczbę całkowitą nie większą od x. Tak więc $a_2 \geqslant [\frac{4}{3}a_1] + 1 \geqslant [\frac{4}{3} \cdot 10] + 1 = 14$. Analogicznie obliczamy

$$\begin{aligned}
a_3 &\geqslant \left[\frac{4}{3}a_2\right] + 1 \geqslant \left[\frac{4}{3} \cdot 14\right] + 1 = 19 \\
a_4 &\geqslant \left[\frac{4}{3}a_3\right] + 1 \geqslant \left[\frac{4}{3} \cdot 19\right] + 1 = 26 \\
a_5 &\geqslant \left[\frac{4}{3}a_4\right] + 1 \geqslant \left[\frac{4}{3} \cdot 26\right] + 1 = 35 \\
a_6 &\geqslant \left[\frac{4}{3}a_5\right] + 1 \geqslant \left[\frac{4}{3} \cdot 35\right] + 1 = 47 \\
a_7 &\geqslant \left[\frac{4}{3}a_6\right] + 1 \geqslant \left[\frac{4}{3} \cdot 47\right] + 1 = 63 \\
a_8 &\geqslant \left[\frac{4}{3}a_7\right] + 1 \geqslant \left[\frac{4}{3} \cdot 63\right] + 1 = 85 \\
a_9 &\geqslant \left[\frac{4}{3}a_8\right] + 1 \geqslant \left[\frac{4}{3} \cdot 85\right] + 1 = 114 \\
a_{10} &\geqslant \left[\frac{4}{3}a_9\right] + 1 \geqslant \left[\frac{4}{3} \cdot 114\right] + 1 = 153.
\end{aligned}$$

Przeczy to założeniu, że wybrane liczby są nie większe od 150.

4. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie $x^4 + (x+2)^4 = 34$. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Podstawmy $x = y-1$. Rozważane równanie przybiera postać $(y-1)^4+(y+1)^4 = 34$, czyli

$$2 \cdot (y^4 + 6y^2 - 16) = 0.$$

Podstawiając $z = y^2$ mamy rozwiązać równanie kwadratowe $z^2 + 6z - 16 = 0$, które ma dwa pierwiastki $z_1 = 2$ i $z_2 = -8$. Ponieważ z jest kwadratem liczby rzeczywistej, więc $z = 2$. Tak więc $y = \sqrt{2}$ lub $y = -\sqrt{2}$. Oznacza to, że nasze równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2}$.

Uwaga: kluczowe podstawienie $x = y-1$ jest naturalne, jeżeli zauważymy, że funkcja $f(x) = x^4+(x+2)^4$ spełnia równanie $f(x) = f(-x-2)$, czyli jej wykres jest symetryczny względem prostej $x = -1$. Postawienie sprowadza się do przeskalowania prostej $x = -1$ na $y = 0$ tak, że f staje się symetryczna.

[*pg, jj*]