

XV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy trzecie

18 marca 2023 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki liczb całkowitych (x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = -1. \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Po podstawieniu $y = 2 - x$ do drugiego równania, otrzymujemy $z^2 - x(2 - x) = 1$. Ponadto $-x(2 - x) = (x - 1)^2 - 1$, więc drugie równanie można zamienić na $z^2 + (x - 1)^2 = 1 + 1$. Liczby z i $x - 1$ są całkowite. Jeśli jedna z nich jest zerem, to druga jest równa $\sqrt{2}$, sprzeczność. Wobec tego $z^2 \geq 1$, $(x - 1)^2 \geq 1$. Skoro suma jest równa dwa, to musi być $z^2 = 1$ oraz $(x - 1)^2 = 1$. Zatem $z = 1$ lub $z = -1$ oraz $x = 0$ lub $x = 2$. Otrzymujemy cztery rozwiązania: $(x, y, z) = (0, 2, -1)$, $(x, y, z) = (0, 2, 1)$, $(x, y, z) = (2, 0, -1)$, $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

2. Punkt D leży we wnętrzu trójkąta ABC i spełnia warunki $\sphericalangle ADB = 90^\circ$, $\sphericalangle BDC = 150^\circ$, $\sphericalangle CDA = 120^\circ$. Udowodnij, że istnieje punkt E różny od D taki, że jeśli F jest odbiciem E względem AD , G jest odbiciem F względem BD , zaś H jest odbiciem G względem CD , to $H = E$.

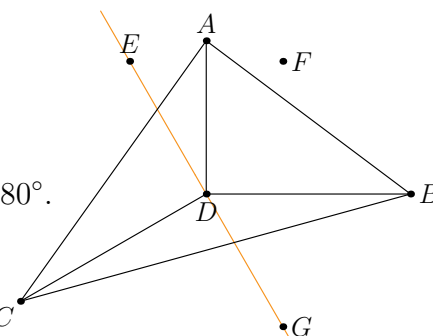
Rozwiązanie.

Ustalmy punkt E tak, że $\sphericalangle BDE = 120^\circ$ oraz punkt E leży wewnątrz kąta ADC . Wtedy $\sphericalangle ADE = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Wynika stąd, że $\sphericalangle ADF = 30^\circ$, więc $\sphericalangle BDF = 60^\circ$. Zatem $\sphericalangle BDG = 60^\circ$. Pokazuje to, że

$$\sphericalangle EDG = \sphericalangle EDA + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDG = 30^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Zatem punkty E, D, G leżą na jednej prostej. Ponadto $|DG| = |DF| = |DE|$, czyli punkty E i G są symetryczne do siebie względem D .

Wreszcie, mamy $\sphericalangle CDG = \sphericalangle CDB - \sphericalangle BDG = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$, zatem CD jest prostopadła do EG i przecina EG w połowie. To pokazuje, że punkty E i G są symetryczne do siebie względem CD , czyli $E = H$.



3. Niech $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $a_n \neq 0$ będą cyframi liczby $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ zapisanej w systemie dziesiętnym. Wykaż, że A jest podzielna przez 19 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $2^n a_0 + 2^{n-1} a_1 + \dots + 2 a_{n-1} + a_n$ jest podzielna przez 19.

Rozwiązanie.

Oznaczmy $B = 2^n a_0 + 2^{n-1} a_1 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$. Mamy pokazać, że A jest podzielna przez 19 wtedy i tylko wtedy, gdy B jest podzielna przez 19.

Dla każdych liczb całkowitych x, y oraz każdej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1}),$$

zatem $x^k - y^k$ jest podzielna przez $x - y$. W szczególności, liczba $20^k - 1$ jest podzielna przez 19. Zatem dla każdego r , liczby $20^k \cdot r$ oraz r dają tę samą resztę z dzielenia przez 19.

Liczba A wynosi $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0$, więc liczba $2^n A$ wynosi

$$20^n a_n + 20^{n-1} \cdot 2a_{n-1} + \dots + 20 \cdot 2^{n-1} \cdot a_1 + 2^n a_0.$$

Na mocy uwagi powyżej, daje ona taką samą resztę z dzielenia przez 19, co liczba

$$a_n + 2 \cdot a_{n-1} + \dots + 2^{n-1} \cdot a_1 + 2^n a_0 = B.$$

Pokazaliśmy, że $2^n A$ daje tę samą resztę z dzielenia przez 19 co B . W szczególności 19 dzieli B wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli $2^n A$. Liczba 19 jest pierwsza, więc ta ostatnia podzielność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy 19 dzieli A . To kończy rozwiązanie.

4. W Konkursie Matematycznym uczestniczy 7 osób z Niebiałystoku. Wśród nich jest 10 par osób znających się. Pokaż, że istnieją wśród nich cztery osoby A, B, C, D takie, że A zna B , B zna C , C zna D oraz D zna A .

Rozwiązanie.

Założmy, że nie ma czterech osób jak w treści zadania. Niech $d_1, \dots, d_7$ oznaczają liczbę znajomych poszczególnych uczestników. Skoro jest 10 par osób znających się, to $\sum_{i=1}^7 d_i = 20$.

Oszacujemy teraz, ile jest trójek osób $A - B - C$, takich, że B zna A oraz C . Z jednej strony, jeśli B ma d znajomych, to trójek z B jest $\binom{d}{2}$. Zatem łącznie trójek jest $\sum_{i=1}^7 \binom{d_i}{2}$. Z drugiej strony, niech ℓ oznacza liczbę par (nieuporządkowanych) uczestników A, C takich, że A i C mają wspólnego znajomego. Skoro nie ma czterech osób jak w treści, to B jest jednoznacznie wyznaczona przez A i C , więc liczba trójek to ℓ :

$$\ell = \sum_{i=1}^7 \binom{d_i}{2}.$$

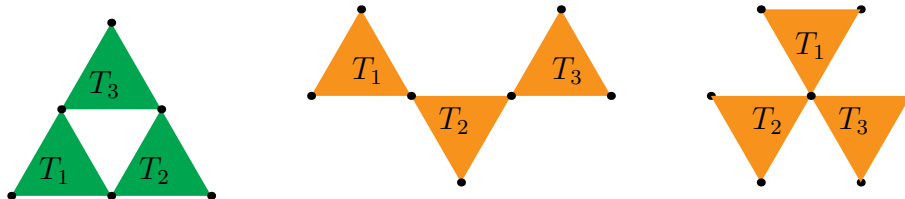
Możemy zapisać $\binom{d_i}{2} = \frac{d_i(d_i-1)}{2} = \frac{(d_i-3)^2 + 5d_i - 9}{2}$, więc

$$\ell = \sum_{i=1}^7 \frac{(d_i-3)^2}{2} + \frac{5}{2} \sum_{i=1}^7 d_i - \frac{63}{2} = \sum_{i=1}^7 \frac{(d_i-3)^2}{2} + 18 + \frac{1}{2},$$

zatem $\ell \geq 19$. Wynika stąd, że liczba par (nieuporządkowanych) uczestników A, C nie mających wspólnego znajomego to co najwyżej $\binom{7}{2} - 19 = 2$.

Dokonawszy oszacowania, powróćmy do rozwiązania zadania. *Trójkątem* ABC nazwiemy trójkę uczestników A, B, C takich, że A i B , B i C oraz C i A znają się. Mamy 10 par uczestników znających się. Z oszacowania powyżej, co najmniej $10 - 2 = 8$ z tych

par ma wspólnego znajomego. Zatem mamy co najmniej $\lceil \frac{8}{3} \rceil = 3$ trójkąty. Oznaczmy je jako T_1, T_2, T_3 . Łącznie mają one 9 wierzchołków, zatem co najmniej dwa z wierzchołków muszą być wspólne. Jak zauważyliśmy powyżej, żadne krawędzie nie mogą być wspólne, więc każde dwa trójkąty mają co najwyżej jeden wspólny wierzchołek.



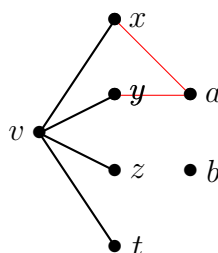
Jeśli mamy łącznie trzy wierzchołki wspólne dla pewnych par trójkątów, to znajdujemy czwórkę uczestników, sprzeczność, patrz lewy rysunek. Jeśli nie, to założmy, że T_1 i T_2 oraz T_2 i T_3 mają wspólne wierzchołki, patrz środkowy i prawy rysunek. W tym przypadku dla każdych dwóch osób D i E niepołączonych krawędzią jednego z trójkątów, istnieją osoby F i G takie, że D zna F , F zna G i G zna E . Mamy łącznie 10 par znajomych a oznaczonych jest na rysunku 9 par. Ostatnia para, niech będzie to $D - E$ wyznacza wraz z powyższymi F i G szukaną czwórkę.

Drugie rozwiązanie

Przeformułujmy zadanie w języku teorii grafów. Zamiast o uczestnikach będziemy mówić o *wierzchołkach* (których zbiór oznaczmy przez V), zamiast o znajomościach, o *krawędziach*, zamiast o liczbie znajomych uczestnika, o *stopniu* wierzchołka, zamiast o znajomych uczestnika v o krawędziach *incydentnych* z v , zamiast o czwórce uczestników jak w zadaniu, o *cyklu długości cztery*.

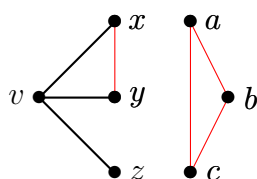
Niech G będzie 7 wierzchołkowym grafem (prostym) mającym 10 krawędzi. Możliwe są następujące sytuacje:

1. G zawiera wierzchołek v stopnia 6. Mamy więc 6 krawędzi incydentnych z v . Pozostałe 4 krawędzie łączą wierzchołki z 6 elementowego zbioru $V \setminus \{v\}$. Cztery krawędzie mają w sumie 8 końców, więc pewne dwie krawędzie mają wspólny koniec w . Niech będą to krawędzie wx i wy . Wówczas w G mamy cykl $v - x - w - y - v$.
2. Maksymalny stopień wierzchołka w G jest równy 5. Niech $v \in V$ ma stopień 5 oraz niech w będzie jedynym wierzchołkiem nie sąsiadującym z v . Jeśli w ma przynajmniej dwóch sąsiadów x, y , to mamy cykl długości cztery: $v - x - w - y - v$. Jeśli w ma co najwyżej jednego sąsiada, to pewne 4 krawędzie muszą mieć oba końce w 5 elementowym zbiorze $V \setminus \{v, w\}$. Nasz graf ma więc dwie krawędzie postaci ab, ac , gdzie $a, b, c \in V \setminus \{v, w\}$. W tym przypadku mamy cykl: $v - b - a - c - v$.
3. Maksymalny stopień wierzchołka w G jest równy 4. Niech v będzie wierzchołkiem stopnia 4 oraz niech a, b będą wierzchołkami nie sąsiadującymi z v .



Jeśli w obrębie wierzchołków $\{x, y, z, t\}$ są trzy krawędzie, to dwie spośród nich muszą mieć wspólny koniec (trzy krawędzie mają w sumie 6 końców). Te dwie krawędzie razem z krawędziami incydentnymi z v (podobnie jak wyżej) wyznaczają cykl długości cztery. Możemy więc założyć, że w obrębie wierzchołków $\{x, y, z, t\}$ są co najwyżej dwie krawędzie. Wówczas zostają nam przynajmniej 4 krawędzie incydentne z a lub b . Przynajmniej 3 spośród nich ma jeden koniec w zbiorze $\{a, b\}$, a drugi w zbiorze $\{x, y, z, t\}$. Wśród nich są dwie mające koniec a , lub dwie mające koniec b . Niech będzie to np. a . Jeśli a sąsiaduje np. z x i y , to mamy cykl: $v - x - a - y - v$.

4. Pozostał do rozpatrzenia ostatni przypadek, gdy maksymalny stopień wierzchołka w G jest nie większy niż 3. Suma stopni wszystkich wierzchołków jest równa 20 - podwojonej liczbie krawędzi, więc G musi mieć sześć wierzchołków stopnia 3 i jeden stopnia 2. Rozważmy zatem wierzchołek v mający trzech sąsiadów x, y, z . Pozostałe 3 wierzchołki oznaczmy przez a, b, c .



Jeśli są dwie krawędzie o obu końcach w zbiorze $\{x, y, z\}$, to te krawędzie mają wspólny wierzchołek. Podobnie jak wyżej stwierdzamy istnienie cyklu długości cztery. Załóżmy zatem, że istnieje co najwyżej jedna krawędź o końcach w zbiorze $\{x, y, z\}$. Jeśli któryś z wierzchołków a, b, c ma dwóch sąsiadów w zbiorze $\{x, y, z\}$ to mamy cykl długości cztery. Rzeczywiście, jeśli np. a sąsiaduje z x i y , to cyklem tym jest: $v - x - a - y - v$. Załóżmy zatem, że a, b i c mają co najwyżej jednego sąsiada w zbiorze $\{x, y, z\}$. W takiej sytuacji muszą istnieć co najmniej 3 krawędzie o obu końcach w zbiorze $\{a, b, c\}$. Z drugiej strony takich krawędzi jest nie więcej niż trzy, a więc a, b, c wyznaczają cykl długości 3. W tej sytuacji w obrębie zbioru $\{x, y, z\}$ istnieje dokładnie jedna krawędź (niech będzie to xy) i każdy wierzchołek spośród a, b, c jest sąsiadem dokładnie jednego wierzchołka ze zbioru $\{x, y, z\}$ (por. rysunek powyżej). Wierzchołki a, b, c mają zatem stopień 3. Jedynym wierzchołkiem stopnia 2 jest jeden spośród elementów zbioru $\{x, y, z\}$. Jeśli jest to z , to z ma jednego sąsiada wśród $\{a, b, c\}$. Wówczas x, y oraz dwa wierzchołki spośród $\{a, b, c\}$ nie sąsiadujące z z tworzą cykl długości cztery. Jeśli jedynym wierzchołkiem stopnia 2 jest x , to każdy spośród wierzchołków a, b, c sąsiaduje z y lub z , przy czym z ma dwóch sąsiadów. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że z sąsiaduje z b i c . Wówczas a sąsiaduje z y i mamy cykl $a - c - z - b - a$. W przypadku, gdy y ma stopień 2 dowód przebiega analogicznie.

W ten sposób wykazaliśmy, że każdy graf 7-wierzchołkowy i mający 10 krawędzi zawiera cykl długości cztery.