

II Konkurs Matematyczny

Politechniki Białostockiej

Etap I – gimnazjum – rozwiązania.

1. (a) Znaleźć wszystkie liczby naturalne n , takie, że liczba $n^3 + 1$ jest pierwsza.

ROZWIĄZANIE. Załóżmy, że liczba n jest taka, że $n^3 + 1$ jest liczbą pierwszą.

Zachodzi $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$. Ale liczba $n^3 + 1$ jest pierwsza, więc nie ma dzielników innych niż 1, $n^3 + 1$.

Mamy więc dwie możliwości:

i.

$$n + 1 = 1$$

Jeżeli $n + 1 = 1$, to $n = 0$, liczba $0^3 + 1 = 1$ nie jest pierwsza.

ii.

$$n + 1 = n^3 + 1$$

$n + 1 = n^3 + 1$, a więc $n = n^3$, $n^3 - n = 0$, $n(n - 1)(n + 1) = 0$, tak więc

$$n = -1 \text{ albo } n = 0 \text{ albo } n = 1$$

Liczba n jest naturalna, więc $n = -1$ odpada, przypadek $n = 0$ rozważyliśmy wcześniej, pozostaje przypadek $n = 1$. Jeżeli $n = 1$ to liczba $1^3 + 1 = 2$ jest pierwsza.

Odpowiedź: Jedyną liczbą n spełniającą warunki zadania jest 1.

- (b) Znaleźć wszystkie liczby naturalne n , takie, że liczba $n^6 + 1$ jest pierwsza.

ROZWIĄZANIE. Załóżmy, że n jest takie, że $n^6 + 1$ jest pierwsza.

Niech $k = n^2$. Oczywiście liczba k jest naturalna, ponadto liczba $k^3 + 1 = n^6 + 1$ jest pierwsza. Liczba k spełnia więc warunki podpunktu a) zadania. Stwierdziliśmy, że jedyną liczbą spełniającą te warunki jest 1, tak więc $k = 1$.

Zachodzi $n^2 = k = 1$, a liczba n jest dodatnia, a więc $n = 1$.

Z drugiej strony dla $n = 1$ liczba $1^6 + 1 = 2$ jest pierwsza.

Odpowiedź: Jedyną liczbą n spełniającą warunki zadania jest 1.

2. Dany jest wypukły czworokąt $ABCD$. Punkty K, L, M, N są środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio, punkt P jest punktem przecięcia KM i LN . Wykazać, że punkt P jest środkiem odcinka KM i środkiem odcinka LN .

DOWÓD. Zachodzi równość

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AD|} = \frac{1}{2}$$

więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika

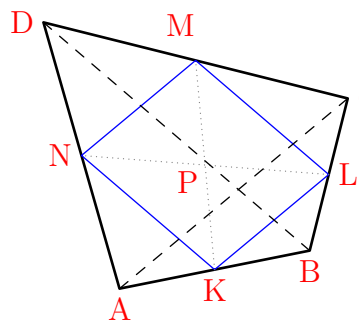
$$KN \parallel BD$$

Podobnie

$$\frac{|CL|}{|CB|} = \frac{|CM|}{|CD|} = \frac{1}{2}$$

więc $LM \parallel BD$.

Tak więc $KN \parallel BD \parallel LM$, zatem $KN \parallel LM$.



Analogicznie dowodzimy, że $MN \parallel AC$, $KL \parallel AC$, więc $MN \parallel KL$. Czworokąt $KLMN$ jest więc równoległobokiem, którego przekątnymi są odcinki KM i LN . W równoległoboku przekątne przecinają się w połowie, a więc punkt przecięcia przekątnych P jest środkiem odcinka KM i środkiem odcinka LN .

■

3. Liczba naturalna zapisana w systemie dziesiętnym $\overline{abcdef}$ (kolejnymi jej cyframi są a, b, c, d, e, f) jest podzielna przez 13. Wykazać, że również liczba $\overline{defabc}$ jest podzielna przez 13.

DOWÓD. Zauważmy, że

$$\overline{abcdef} + \overline{defabc} = 1000\overline{abc} + \overline{def} + 1000\overline{def} + \overline{abc} = 1001(\overline{abc} + \overline{def}) = 13 \cdot 77(\overline{abc} + \overline{def})$$

Liczba $\overline{abcdef}$ jest podzielna przez 13 i liczba $\overline{abcdef} + \overline{defabc}$ jest podzielna przez 13. Liczba $\overline{defabc} = (\overline{abcdef} + \overline{defabc}) - \overline{abcdef}$ jest więc podzielna przez 13 jako różnica liczb podzielnych przez 13. ■

4. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} -3a^2 + 5b^2 + 13c^2 = 0 \\ 7a^2 - 11b^2 - 28c^2 = 0 \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE. Załóżmy, że liczby rzeczywiste a, b, c spełniają dany układ równań. Liczby te spełniają również równanie

$$7(-3a^2 + 5b^2 + 13c^2) + 3(7a^2 - 11b^2 - 28c^2) = 0$$

Redukujemy

$$7(-3a^2 + 5b^2 + 13c^2) + 3(7a^2 - 11b^2 - 28c^2) = -21a^2 + 35b^2 + 91c^2 + 21a^2 - 33b^2 - 84c^2 = 2b^2 + 7c^2$$

Otrzymujemy równanie $2b^2 + 7c^2 = 0$.

Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to $x^2 \geq 0$, przy czym $x^2 = 0$ tylko jeżeli $x = 0$. A więc

$$2b^2 + 7c^2 = 0$$

jest spełnione tylko jeżeli $b = 0$ i $c = 0$.

Podstawmy $b = 0, c = 0$ do pierwszego równania układu:

$$-3a^2 + 5 \cdot 0 + 13 \cdot 0 = 0$$

$$-3a^2 = 0$$

a więc $a^2 = 0$, $a = 0$.

Oczywiście trójka $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ spełnia równania.

Odpowiedź: Jedyną trójką liczb spełniających dany układ równań jest $(0, 0, 0)$.

5. W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 45° oraz $|AB| = 1$. Punkty D, E leżą na bokach BC, AC odpowiednio, oraz $AD \perp BC$, $BE \perp AC$. Obliczyć $|DE|$, odpowiedź uzasadnić.

I ROZWIĄZANIE Niech H oznacza punkt przecięcia prostych BE i AD . Trójkąt ABC jest ostrokątny, więc H leży na odcinkach BE i AD .

Policzmy trochę kątów:

$$\angle EAH = \angle DAC = 180^\circ - \angle ACD - \angle ADC = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

$$\angle AHE = 180^\circ - \angle HEA - \angle HAE = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Analogicznie

$$\angle HBD = \angle BHD = 45^\circ$$

Trójkąty AHE, BHD są prostokątne równoramienne, w szczególności są podobne, więc

$$\frac{|EH|}{|HA|} = \frac{|DH|}{|HB|}$$

Ponadto z tw. o kącie przyległym

$$\angle AHB = \angle EHD = 135^\circ$$

Na mocy cechy bok-kąt-bok podobieństwa trójkątów

$$\triangle EHD \simeq \triangle AHB$$

Uzyskujemy zatem proporcję

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EH|}{|AH|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ostatnia równość wynika z tw. Pitagorasa zastosowanego do trójkąta AEH .

W zadaniu mamy równość $|AB| = 1$, stąd $|DE| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

II ROZWIĄZANIE

Fakt W trójkącie prostokątnym środek przeciwprostokątnej jest równo oddalony od wszystkich trzech wierzchołków trójkąta.

DOWÓD FAKTU Weźmy trójkąt prostokątny ABC , przy czym niech kąt przy wierzchołku C będzie prosty. Niech M oznacza środek przeciwprostokątnej AB .

Wiemy, że $|AM| = |BM|$, pozostaje udowodnić $|AM| = |CM|$.

Niech E oznacza środek boku AC . Z twierdzenie odwrotnego do twierdzenia Talesa wiemy, że $ME \parallel BC$, gdyż $\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$. Ale trójkąt jest prostokątny, czyli $ME \parallel BC \perp AC$. Tym samym $ME \perp AC$.

Wnioskujemy, że $\angle CEM = \angle AEM = 90^\circ$. Ponadto wiemy, że $|CE| = |EA|$ i $|ME| = |ME|$. Na mocy cechy przystawiania trójkątów bok-kąt-bok stwierdzamy, że trójkąty CEM i AEM są przystające, a więc $|CM| = |AM|$. ■

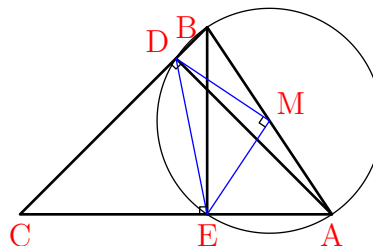
Niech M oznacza środek boku AB . Trójkąty ADB, AEB są prostokątne o przeciwprostokątnej AB , więc z faktu wynika

$$|MD| = |MA| = |MB| \text{ i } |ME| = |MA| = |MB|$$

$$|MA| = |MB| = |MD| = |ME|$$

Punkty A, B, D, E leżą więc na okręgu o promieniu $|AM| = 1/2$ i środku w M .

Chcemy teraz policzyć miarę kąta $\angle EMD$.



Obliczamy $\angle DAE = \angle DAC = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Kąty $\angle DAE$ i $\angle DME$ to kąt wpisany i środkowy oparte na tym samym łuku, a więc

$$\angle DME = 2 \cdot \angle DAE = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

Trójkąt DME jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, o ramionach długości $1/2$, więc jego przeciwprostokątna DE ma długość $\sqrt{2} \cdot 1/2 = \sqrt{2}/2$.

6. Liczby $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ rozbito na trzy grupy tak, że w każdej grupie są po trzy liczby. Wykazać, że iloczyn liczb pewnej grupy jest nie mniejszy niż 72 .

DOWÓD. Rozważmy iloczyny i_1, i_2, i_3 liczb z pierwszej, drugiej, trzeciej grupy. Wiemy, że

$$i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 72^2 \cdot 70 = 362880$$

Założmy teraz, że wszystkie iloczyny są mniejsze niż 72 :

$$i_1, i_2, i_3 < 72$$

Liczby i_1, i_2, i_3 są naturalne, więc

$$i_1, i_2, i_3 \leq 71$$

$$362880 = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \leq 71^3 = 357911$$

Ale $362880 > 357911$. Sprzeczność!

Założenie, że wszystkie iloczyny są mniejsze od 72 doprowadza do sprzeczności, a zatem któryś z tych trzech iloczynów musi być nie mniejszy niż 72 .

Uwaga: Kogoś może razić operowanie na liczbach tak dużych jak $362880, 357911$. Poniżej krótki dowód nierówności $72^2 \cdot 70 > 71^3$ bez brutalnego przeliczenia.

$$72^2 \cdot 70 = 72 \cdot (72 \cdot 70) = 72 \cdot (71 + 1) \cdot (71 - 1) = 72 \cdot (71^2 - 1) = 72 \cdot 71^2 - 72 = 71^3 + 71^2 - 72 > 71^3$$

■