



V Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

ETAP KORESPONDENCYJNY, GIMNAZJUM
TERMIN NADSYŁANIA ROZWIĄZAŃ: 15.04.2013

ZADANIE 1

Na płaszczyźnie narysowany jest trójkąt $\triangle ABC$. Punkt A' jest symetryczny do A względem punktu C , punkt B' jest symetryczny do B względem punktu A , zaś punkt C' jest symetryczny do C względem punktu B . Ile wynosi stosunek pól trójkątów $A'B'C'$ i ABC ?

ZADANIE 2

Czy więcej dzielników dodatnich liczby 2013^{2013} kończy się jedyneką, czy trójką? Odpowiedź uzasadnij.

ZADANIE 3

W jednym wierzchołku sześcianu znajduje się pajęczyna, zaś w pewnym innym gniazdo pszczoł. W pozostałych wierzchołkach leżą kryształki cukru. Udowodnij, że jeśli pszczoła wyszła z gniazda, zebrała wszystkie kryształki cukru chodząc po krawędziach sześcianu i wróciła, przy czym nie przechodziła przez pajęczynę, to przeszła przez pewien wierzchołek (inny niż gniazdo) dwukrotnie.

ZADANIE 4

Na płaszczyźnie wybrano 2013 różnych punktów, nie wszystkie na jednej prostej. Pokaż, że (niezależnie od wyboru punktów) jest więcej niż 2013 różnych trójkątów o wierzchołkach w wybranych punktach.

ZADANIE 5

Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają równania $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Uzasadnij, że

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \leq 1.$$

ZADANIE 6

Nora krecika składa się z 25 kopczyków połączonych tunelami. Z każdego z kopczyków wychodzą tunele prowadzące do dwunastu innych kopczyków (tunele nie przecinają się). Uzasadnij, że krecik może przejść pomiędzy dowolnymi dwoma kopczykami nie wychodząc na powierzchnię.