



III Konkurs Matematyczny

Politechniki Białostockiej

Etap I – gimnazjum.

1. Etap korespondencyjny konkursu matematycznego cieszył się dużym zainteresowaniem — wystartowało w nim aż 2011 uczestników. Udowodnij, że w konkursie wzięli udział uczniowie co najmniej 50 szkół lub z pewnej szkoły wystartowało aż 42 uczniów.
2. Ile maksymalnie liczb pierwszych może wystąpić wśród dziesięciu kolejnych liczb całkowitych?
3. Czy istnieje trójkąt prostokątny, którego boki i wysokość opuszczona z wierzchołka o kącie prostym mają długości całkowite?
4. Okręgi o_1, o_2 o środkach w O_1, O_2 przecinają się w punktach A i B . Półprosta O_1A przecina o_2 w L , a półprosta O_2A przecina o_1 w K ($K, L \neq A$). Dowiedź, że prosta BA jest dwusieczną kąta $\sphericalangle KBL$.
5. Dla dowolnych liczb x, y z przedziału $(0, 1)$ udowodnij, że $xy - x - y < (xy)^2 - x^2 - y^2$.
6. W pewnym pięciokącie wypukłym wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite. Wykaż, że:
 - (a) środek jednej z przekątnych lub jednego z boków tego pięciokąta również ma współrzędne całkowite,
 - (b) pole tego pięciokąta wynosi co najmniej $\frac{5}{2}$.