



# II Konkurs Matematyczny

## Politechniki Białostockiej

---

### Etap I – gimnazjum.

- Znaleźć wszystkie liczby naturalne  $n$ , takie, że liczba  $n^3 + 1$  jest pierwsza.
  - Znaleźć wszystkie liczby naturalne  $n$ , takie, że liczba  $n^6 + 1$  jest pierwsza.
- Dany jest wypukły czworokąt  $ABCD$ . Punkty  $K, L, M, N$  są środkami boków  $AB, BC, CD, DA$  odpowiednio, punkt  $P$  jest punktem przecięcia  $KM$  i  $LN$ . Wykazać, że punkt  $P$  jest środkiem odcinka  $KM$  i środkiem odcinka  $LN$ .
- Liczba naturalna zapisana w systemie dziesiętnym  $\overline{abcdef}$  (kolejnymi jej cyframi są  $a, b, c, d, e, f$ ) jest podzielna przez 13. Wykazać, że również liczba  $\overline{defabc}$  jest podzielna przez 13.
- Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych  $(a, b, c)$  spełniające układ równań

$$\begin{cases} -3a^2 + 5b^2 + 13c^2 = 0 \\ 7a^2 - 11b^2 - 28c^2 = 0 \end{cases}$$

- W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $C$  ma miarę  $45^\circ$  oraz  $|AB| = 1$ . Punkty  $D, E$  leżą na bokach  $BC, AC$  odpowiednio, oraz  $AD \perp BC$ ,  $BE \perp AC$ . Obliczyć  $|DE|$ , odpowiedź uzasadnić.
- Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rozbito na trzy grupy tak, że w każdej grupie są po trzy liczby. Wykazać, że iloczyn liczb pewnej grupy jest nie mniejszy niż 72.