



III Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania etapu korespondencyjnego - gimnazjum - rozwiązania

1. Etap korespondencyjny konkursu matematycznego cieszył się dużym zainteresowaniem — wystartowało w nim aż 2011 uczestników. Udowodnij, że w konkursie wzięli udział uczniowie co najmniej 50 szkół lub z pewnej szkoły wystartowało aż 42 uczniów.

Rozwiązanie.

Przypuśćmy (wbrew tezie zadania), że w konkursie wystartowali uczniowie z co najwyżej 49 szkół, przy czym z każdej co najwyżej 41 uczniów. Łącznie w konkursie wystartowało zatem nie więcej niż $49 \times 41 = 2009$ uczniów. Przeczy to założeniu, że było 2011 uczestników.

2. Ile maksymalnie liczb pierwszych może wystąpić wśród dziesięciu kolejnych liczb całkowitych?

Rozwiązanie.

Przez liczbę pierwszą rozumiemy tu liczbę całkowitą $p > 1$, której jedynymi dzielnikami są 1 oraz p . Wśród dziesięciu kolejnych dodatnich liczb całkowitych jest pięć liczb parzystych i pięć nieparzystych. Wśród pięciu liczb parzystych co najwyżej jedna jest pierwsza (może nią być tylko 2!). Z drugiej strony wśród dziesięciu kolejnych liczb występują przynajmniej trzy kolejne wielokrotności trójki. Są to liczby postaci $3k$, $3k + 3$, $3k + 6$. Dwie ostatnie są różnej parzystości i obie są większe od 3. Jedna z nich jest zatem nieparzystą liczbą złożoną. Tak więc wśród dziesięciu kolejnych dodatnich liczb całkowitych są co najwyżej cztery nieparzyste liczby pierwsze. Łącznie z dwójką możemy zatem otrzymać co najwyżej pięć liczb pierwszych. Ciąg

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

zawiera dokładnie pięć liczb pierwszych.

3. Czy istnieje trójkąt prostokątny, którego boki i wysokość opuszczona z wierzchołka o kącie prostym mają długości całkowite?

Rozwiązanie.

Jeżeli przyprostokątne trójkąta mają długości a i b zaś przeciwprostokątna ma długość c , to wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość $h = ab/c$. Wynika stąd, że jeśli a, b, c są liczbami całkowitymi, to h jest liczbą wymierną. Zauważmy, że jeśli k jest dowolną liczbą dodatnią, to ka , kb , kc są długościami

boków podobnego trójkąta o wysokości kh . Tak więc dla każdego trójkąta prostokątnego o całkowitych długościach boków istnieje podobny trójkąt, którego wysokość jest też długości całkowitej. Na przykład z trójkąta o bokach 3, 4, 5 i wysokości $h = 12/5$ otrzymujemy trójkąt o bokach 15, 20, 25 i wysokości 12.

4. Okręgi o_1, o_2 o środkach w O_1, O_2 przecinają się w punktach A i B . Półprosta O_1A przecina o_2 w L , a półprosta O_2A przecina o_1 w K ($K, L \neq A$). Dowiedz, że prosta BA jest dwusieczną kąta $\sphericalangle KBL$.

Rozwiązanie.

Trójkąty AO_1K i AO_2L są równoramienne oraz $\sphericalangle O_1AK = \sphericalangle O_2AL$ - jako kąty wierzchołkowe. Stąd wynika, że

$$\sphericalangle AO_1K = 180^\circ - 2\sphericalangle O_1AK = 180^\circ - 2\sphericalangle O_2AL = \sphericalangle AO_2L.$$

Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym otrzymujemy

$$\sphericalangle ABK = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_1K = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_2L = \sphericalangle ABL.$$

Prosta AB jest zatem dwusieczną kąta KBL .

5. Dla dowolnych liczb x, y z przedziału $(0, 1)$ udowodnij, że $xy - x - y < (xy)^2 - x^2 - y^2$.

Rozwiązanie.

Ponieważ $0 < x, y < 1$, więc $0 < x^2 < x$ i $0 < y^2 < y$. Stąd wynika, że $0 < 1 - x < 1 - x^2$ oraz $0 < 1 - y < 1 - y^2$. Mnożąc stronami ostatnie nierówności otrzymamy $(1 - x)(1 - y) < (1 - x^2)(1 - y^2)$, czyli $1 + xy - x - y < 1 + x^2y^2 - x^2 - y^2$. Ostatecznie $xy - x - y < (xy)^2 - x^2 - y^2$.

6. W pewnym pięciokącie wypukłym wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite. Wykaż, że:

- środek jednej z przekątnych lub jednego z boków tego pięciokąta również ma współrzędne całkowite,
- pole tego pięciokąta wynosi co najmniej $\frac{5}{2}$.

Rozwiązanie.

- Niech $A_i(x_i, y_i)$, gdzie $i = 1, 2, 3, 4, 5$, będą wierzchołkami rozważanego pięciokąta wypukłego W . Wśród pięciu liczb całkowitych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 są przynajmniej trzy tej samej parzystości. Niech będą to x_i, x_j, x_k . Wśród trzech liczb y_i, y_j, y_k są dwie tej samej parzystości. Niech będą to np. y_i oraz y_j . W takiej sytuacji wierzchołki A_i oraz A_j mają pierwsze współrzędne oraz drugie współrzędne będące liczbami całkowitymi tej samej parzystości. Środek odcinka A_iA_j ma współrzędne $(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$ będące liczbami całkowitymi.

- (b) Zauważmy, że trójkąt T którego wierzchołki mają współrzędne całkowite ma pole nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$. Istotnie, każdy taki trójkąt jest wpisany w pewien prostokąt P , którego boki leżą na liniach siatki. Pole tego prostokąta jest liczbą całkowitą. Aby obliczyć pole T należy od pola P odjąć pola narożnych trójkątów prostokątnych (trzech, dwóch lub jednego, w zależności od położenia wierzchołków T). Pole każdego z tych trójkątów jest liczbą postaci $\frac{m}{2}$, gdzie m jest całkowite. Stąd pole T jest też postaci $\frac{m}{2}$, a więc jest nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$.

Z części (a) wynika, że środek S pewnego odcinka A_iA_j ma współrzędne całkowite. Jeśli S jest punktem wewnętrznym W , to mamy pięć trójkątów A_1SA_2 , A_2SA_3 , A_3SA_4 , A_4SA_5 , A_5SA_1 pokrywających W , a więc pole $W \geq \frac{5}{2}$.

Jeśli S jest środkiem pewnego boku, np. A_1A_2 , to mamy podział W na cztery trójkąty: SA_1A_5 , SA_2A_3 , SA_3A_4 i SA_4A_5 . Punkty S, A_2, A_3, A_4, A_5 są wierzchołkami pięciokąta wypukłego W' . Z tych samych powodów co W , wielokąt W' może być podzielony na przynajmniej cztery trójkąty o polach przynajmniej $\frac{1}{2}$ każdy. Ponieważ W powstaje przez dołączenie do W' trójkąta SA_1A_5 otrzymujemy podział W na przynajmniej pięć trójkątów o polach nie mniejszych niż $\frac{1}{2}$, a więc pole $W \geq \frac{5}{2}$.