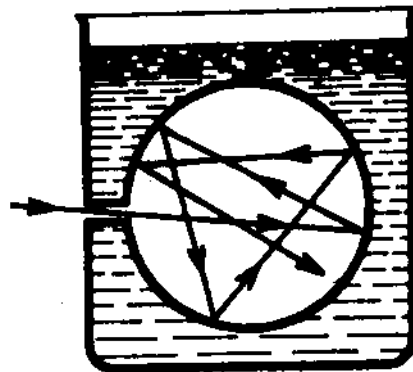


Mechanika kwantowa

Problemy fizyki początku XX wieku

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

- *Ciałem doskonale czarnym* nazywamy ciało całkowicie pochłaniające na nie promieniowanie elektromagnetyczne, niezależnie od długości fali.
- Żadne ciało realne nie zachowuje się ściśle jak ciało doskonale czarne.
- Dobrym modelem ciała doskonale czarnego może być wnętrze światłoszczelnej komory z małym otworem.



Model ciała doskonale czarnego

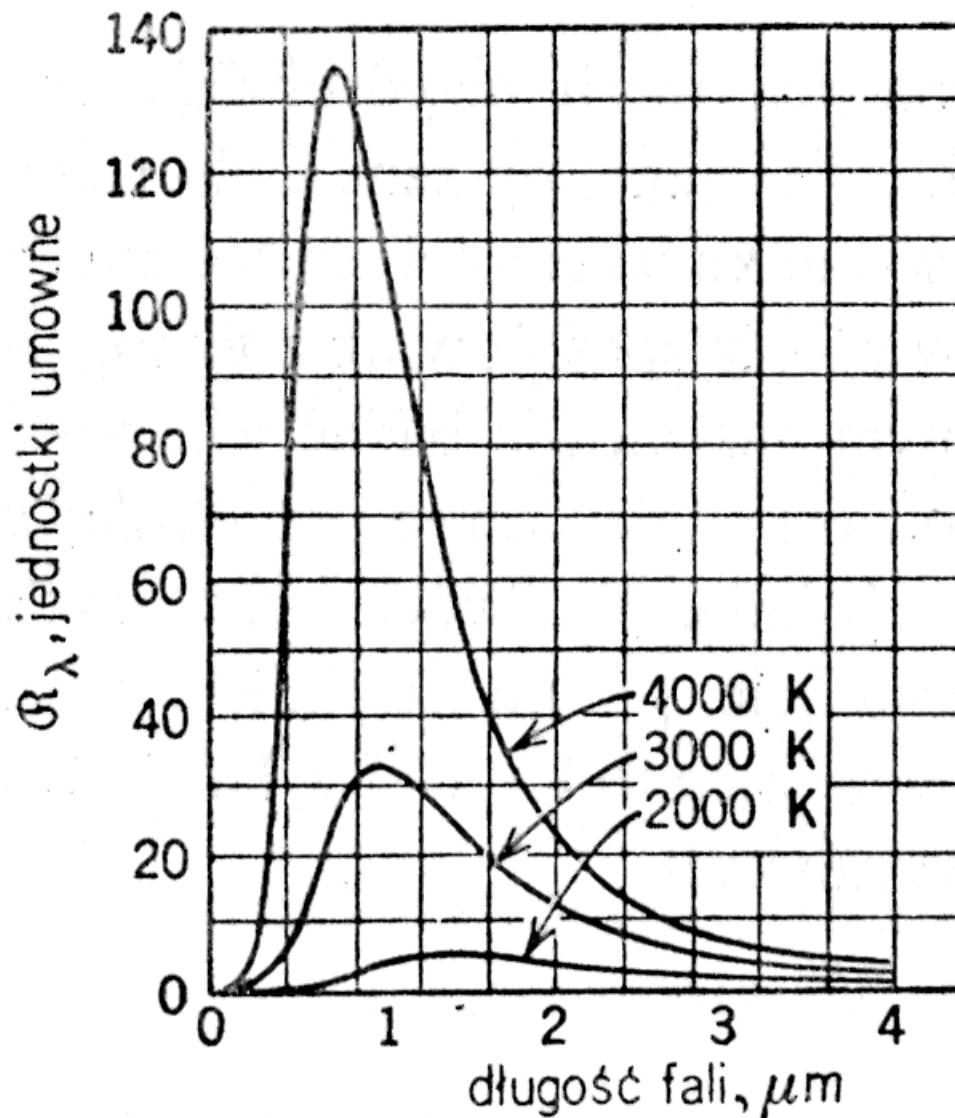
- Doświadczalnie stwierdzono, że całkowita zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego (moc promieniowana z jednostki powierzchni) wynosi

$$R_T = \sigma T^4$$

gdzie σ jest pewną stałą (stała Stefana-Boltzmana).

- Załóżmy, że wewnątrz naszej komory (wnęki) temperatura jest ustalona. Promieniowanie znajdujące się wewnątrz takiej komory powinno być w stanie równowagi termodynamicznej z jej ściankami. Promieniowanie to powinno być jednorodne, izotropowe i niespolaryzowane.

- Jaki jest jego rozkład widmowy (zależność natężenia od długości fali)?



- Na podstawie czysto termodynamicznych rozważań w 1893 r. Wien uzyskał zależność opisującą związek temperatury ciała doskonale czarnego z długością fali, dla której w rozkładzie energii występuje maksimum:

$$\lambda_{\max} T = b$$

(wartość stałej b została wyznaczona doświadczalnie i wynosi $2,8978 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$).

Po dalszych rozważaniach, 1896 r. Wien uzyskał wzór opisujący zdolność emisyjną (mocy emitowanej z jednostkowej powierzchni ciała doskonale czarnego) w zależności od długości fali λ i temperatury T ciała doskonale czarnego:

$$R_{\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T}}$$

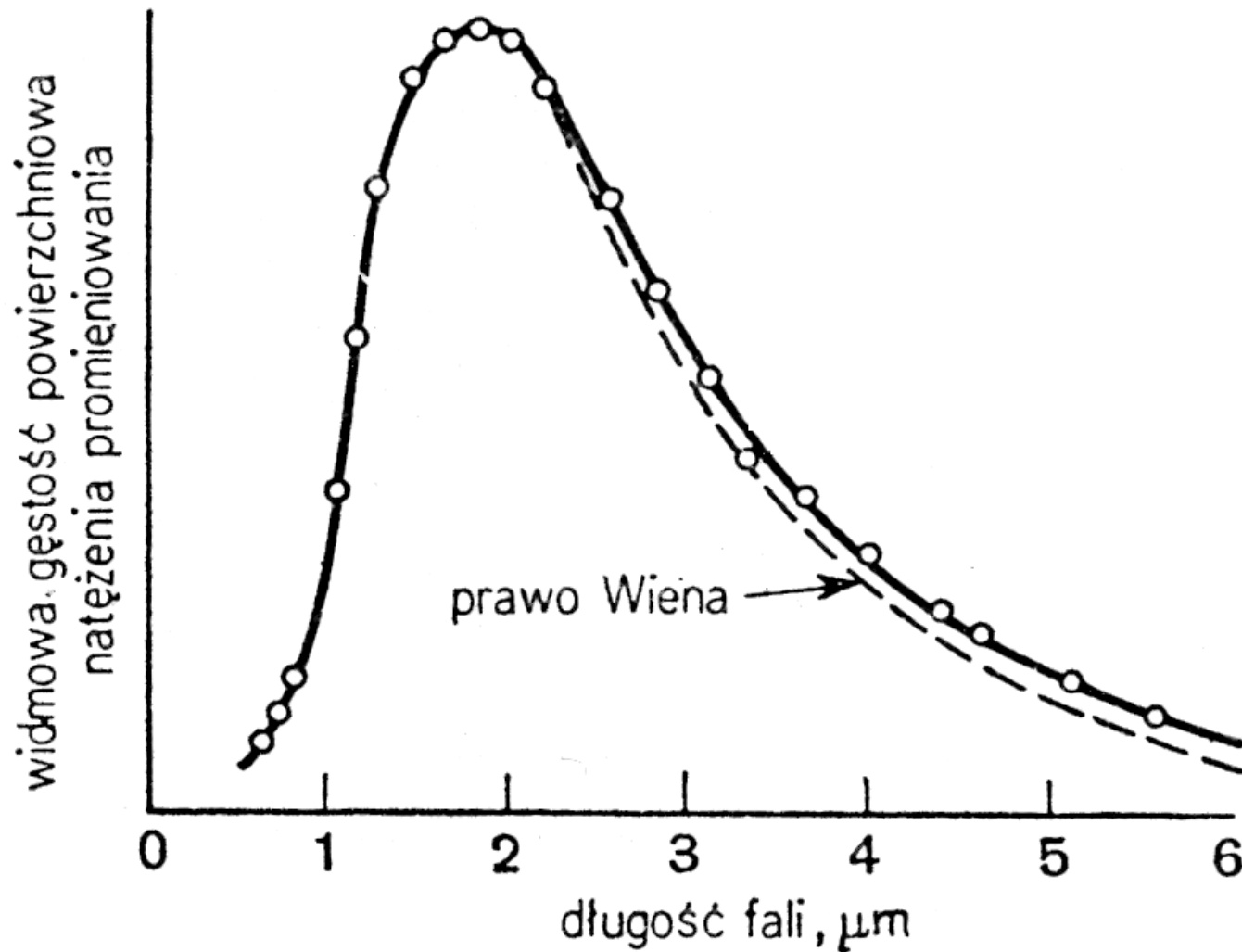
(c_1 , c_2 są pewnymi stałymi).

- W 1900 r. Rayleigh i Jeans zaproponowali inny opis promieniowania ciała doskonale czarnego. Ich model opierał się na mechanice statystycznej i teorii fal elektromagnetycznych.

We wnętrzu komory (wnęki), będącej modelem ciała doskonale czarnego powstają elektromagnetyczne fale stojące, które są niezmiennie w czasie (bo promieniowanie elektromagnetyczne wewnątrz komory jest w stanie równowagi termodynamicznej ze ściankami komory (wnęki)).

Fale stojące wewnątrz komory mają węzły na powierzchni jej ścianek. W przypadku jednowymiarowym, jeżeli odległość od ściany do ściany wnętrza byłaby równa a , spełniony jest związek

$$\frac{a}{n} = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu}$$



Prawo Wiena jest zgodne z doświadczeniem, ale tylko dla małych długości fal.

Stąd

$$n = \frac{2a}{c} \nu$$

a liczba fal o częstotliwościach od ν do $\nu + d\nu$ wynosi:

$$n(\nu) d\nu = \frac{2a}{c} d\nu$$

W przypadku trójwymiarowej komory o objętości a^3 i promieniowania spolaryzowanego, liczba fal (modów) o częstotliwościach od ν do $\nu + d\nu$ wynosi:

$$N(\nu) d\nu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu$$

Ponieważ we wnętrze fale są niespolaryzowane, to wynik ten należy podwoić:

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi a^3}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Gęstość energii promieniowania o długości fali leżącej w przedziale od ν do $\nu+d\nu$ w jednostce objętości wynosi:

$$u_\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} E_{\text{śr}}$$

gdzie $E_{\text{śr}}$ oznacza średnią energię modu.

Zgodnie z prawem Boltzmana, prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o energii leżącej w przedziale od E do $E+dE$ wynosi

$$P(E)dE = Ae^{-\beta E}dE$$

gdzie A i β są pewnymi stałymi i musi być spełniony warunek:

$$\int_0^{\infty} P(E)dE = \int_0^{\infty} Ae^{-\beta E}dE = 1$$

Średnia energia równa jest

$$E_{\acute{s}r} = \int_0^{\infty} EAe^{-\beta E}dE$$

Stąd

$$E_{sr} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-\beta E} dE}{\int_0^{\infty} e^{-\beta E} dE} = \frac{1}{\beta}$$

Aby przebieg zjawisk statystycznych przewidywanych przez fizykę klasyczną był zgodny z rzeczywistością:

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

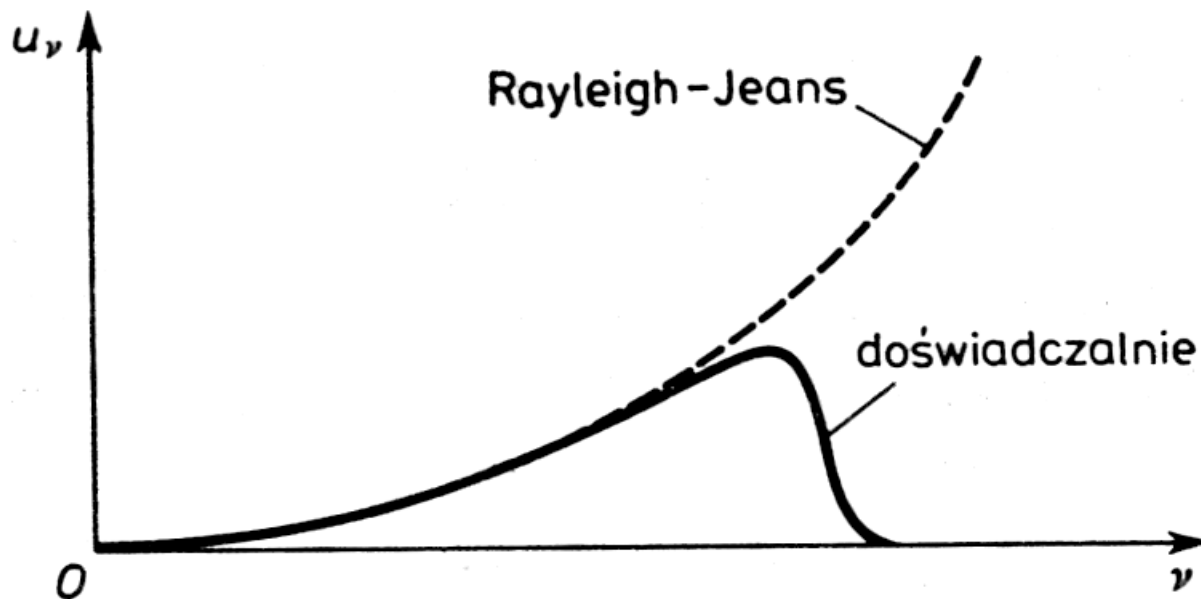
gdzie k jest stałą Boltzmana. Stąd

$$E_{sr} = kT$$

Ostatecznie mamy:

$$u_\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} kT$$

Wynik ten jest zgodny z doświadczeniem tylko dla małych częstotliwości fal (tzw. Katastrofa w nadfiolecie).



- W 1900 r. Max Planck, który nie znał pracy Rayleygha i Jeansa, zaproponował modyfikacje prawa Wiena, która dawała wynik bardzo dobrze zgodny z doświadczeniem:

$$R_{\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}$$

Dopiero później „dorobił” do tego wzoru model zjawisk, z którego ten wzór wynikał.

Model Plancka był prawie identyczny z modelem Rayleygha-Jeansa. Jedyna różnica polegała na tym, że przyjął on, że energia, jaką mogą posiadać fale o częstotliwości ν może być równa wielokrotności pewnej energii E_0 :

$$E = nE_0$$

Wówczas średnia energia oscylatora

$$\begin{aligned}
 E_{\text{sr}} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nE_0 e^{-\beta nE_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nE_0}} = \frac{-\frac{d}{d\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nE_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nE_0}} = \\
 &= \frac{-\frac{d}{d\beta} (1 + e^{-\beta E_0} + e^{-2\beta E_0} + \dots)}{1 + e^{-\beta E_0} + e^{-2\beta E_0} + \dots} = \\
 &= \frac{-\frac{d}{d\beta} \frac{1}{1 - e^{-\beta E_0}}}{\frac{1}{1 - e^{-\beta E_0}}} = \frac{\frac{E_0 e^{-\beta E_0}}{(1 - e^{-\beta E_0})^2}}{\frac{1}{1 - e^{-\beta E_0}}} = \frac{E_0 e^{-\beta E_0}}{1 - e^{-\beta E_0}} = \frac{E_0}{e^{\beta E_0} - 1}
 \end{aligned}$$

Planck przyjął liniową zależność E_0 od ν oraz „klasyczną” postać β :

$$E_{sr} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

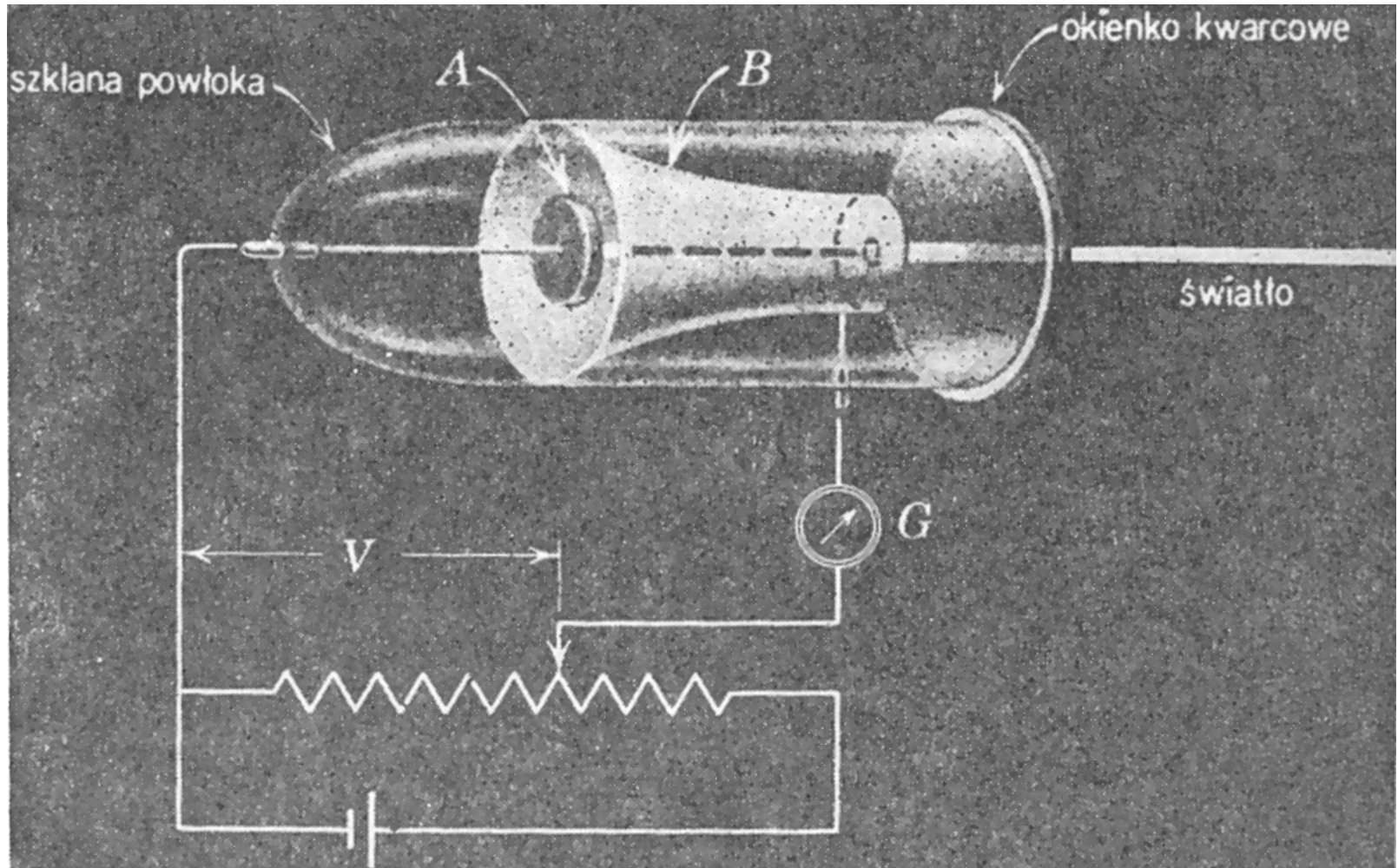
i gęstość energii promieniowania w komorze:

$$u_\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Stała $h=6,6262 \cdot 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$ została dobrana tak, by uzyskać wyniki zgodne z doświadczeniem.

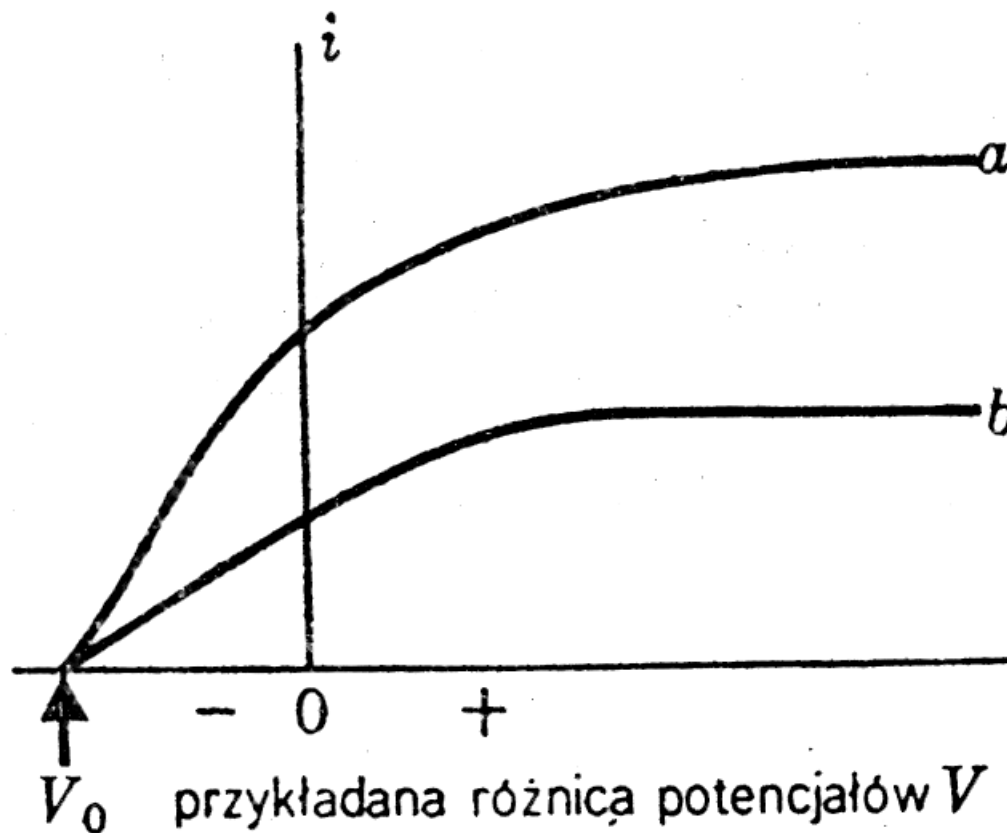
- Z założeń przyjętych przez Plancka wynika, że energia fali elektromagnetycznej o częstotliwości ν jest wielokrotnością $h\nu$.

Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne

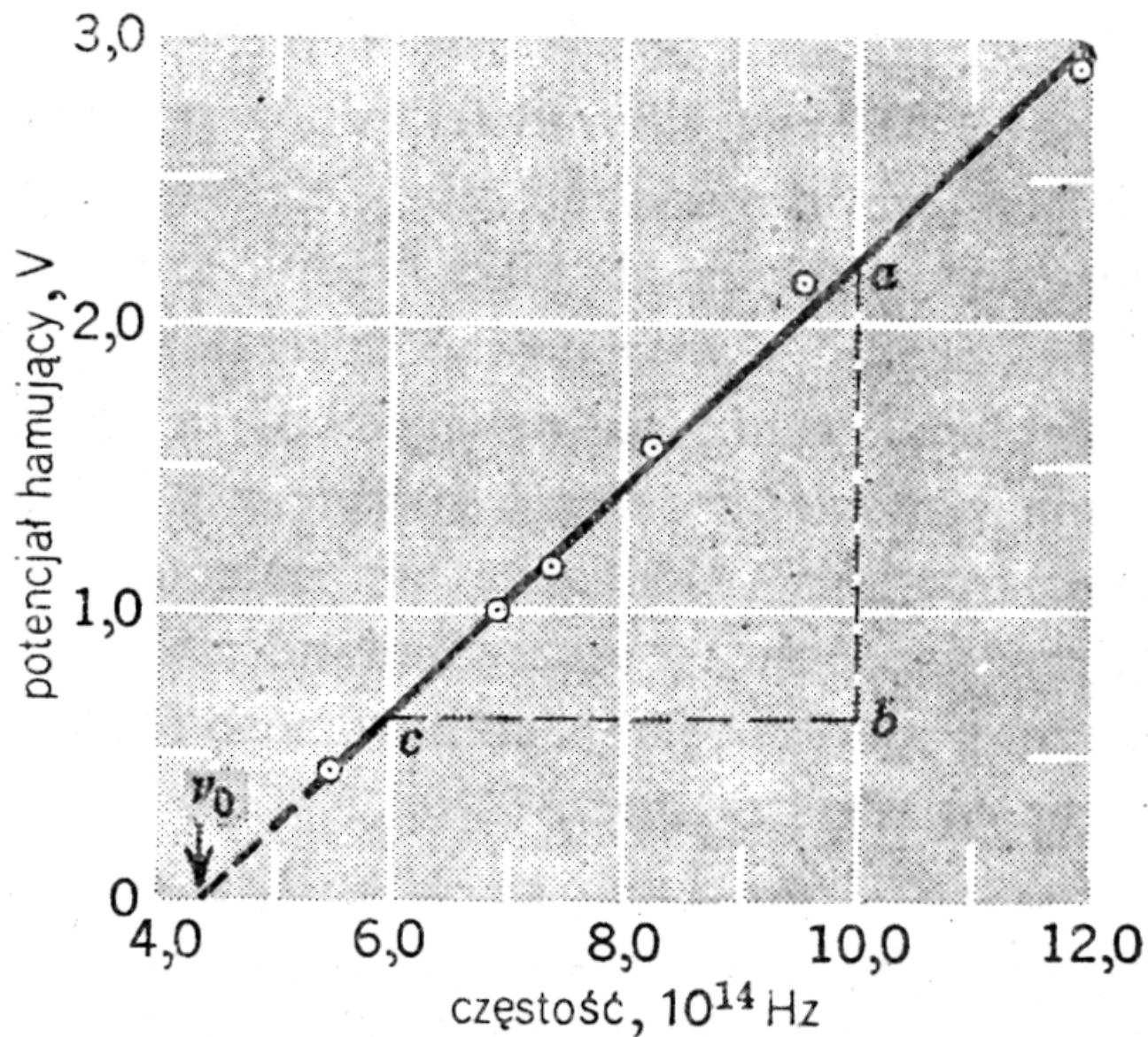


Aparat do badania zjawiska fotoelektrycznego. A – fotokatoda, z której wybijane są elektrony przez padające światło. B - anoda

- Polega ono na emisji elektronów z powierzchni ciała stałego, na które pada promieniowanie elektromagnetyczne.
- Zjawisko zostało odkryte w 1888 r. przez Hallwachsa, który stwierdził, że płytka cynkowa oświetlona promieniami ultrafioletowymi ładuje się dodatnio.
- W 1902 r. Lenard wykrył podstawowe prawa, którym podlega zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne:
 - Dla promieniowania o danym rozkładzie widmowym liczba emitowanych elektronów jest proporcjonalna do natężenia padającego promieniowania.
 - Maksymalna energia kinetyczna emitowanych elektronów rośnie wraz z częstotliwością promieniowania i jest niezależna od jego natężenia.



- Dla każdej substancji istnieje pewna częstotliwość progowa ν_0 , taka, że promieniowanie o częstotliwości niższej od ν_0 nie wywołuje emisji elektronów z powierzchni substancji. Dla częstotliwości wyższych od ν_0 maksymalna energia kinetyczna emitowanych elektronów jest proporcjonalna do $(\nu - \nu_0)$.



Potencjał hamujący w funkcji częstości światła dla sodu
 $\nu_0 = 4,39 \cdot 10^{14}$ Hz. Maksymalna energia kinetyczna
 elektronów $K_{\max} = eV_0$

- Nie zaobserwowano żadnego opóźnienia w pojawieniu się elektronów po oświetleniu substancji nawet bardzo promieniowaniem o bardzo małym natężeniu.
- Zjawiska fotoelektrycznego zewnętrznego nie da się wytłumaczyć w ramach fizyki klasycznej.
- Jego wytłumaczenie podał w 1905 r. Albert Einstein. Przyjął o, że energia wiązki świetlnej rozchodzi się w przestrzeni w postaci skończonych porcji energii (fotonów). Energia pojedynczego fotonu wynosi:

$$E = h\nu$$

Z zasady zachowania energii:

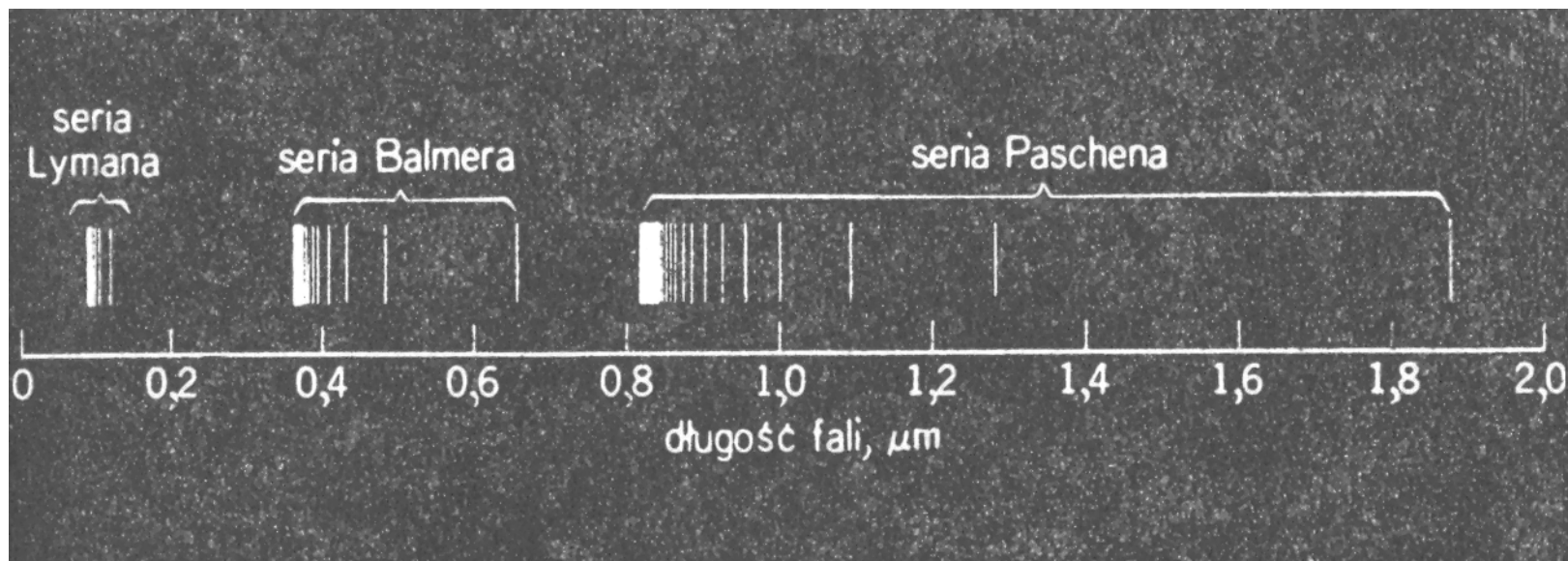
$$h\nu = K_{\max} + W$$

gdzie W oznacza energię traconą przez elektron przez powierzchnię metalu (pracę wyjścia).

- Za wyjaśnienie zjawiska fotoelektrycznego Einstein otrzymał w 1927 r. nagrodę Nobla.

Budowa atomów i widmo ich promieniowania

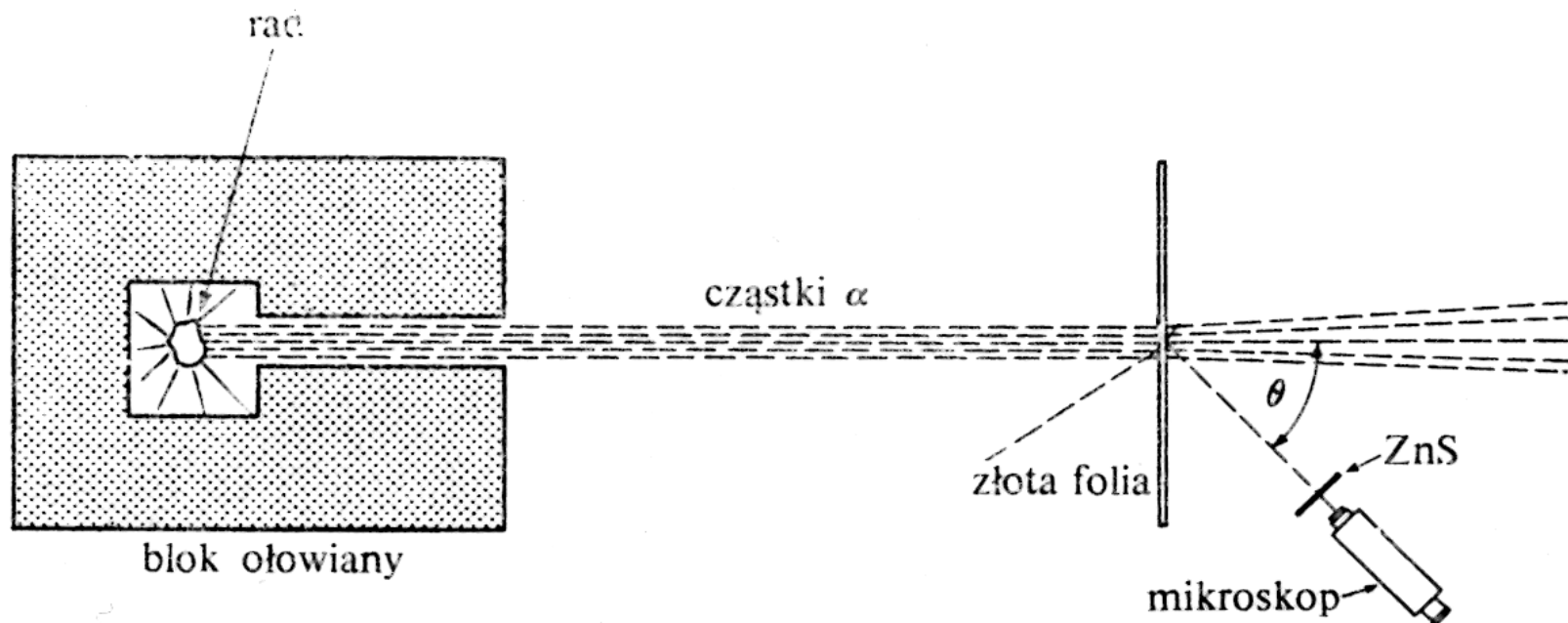
- Na początku XX w. było już wiadomo, że atomy nie są niepodzielne – składają się z ujemnych elektronów i dużo cięższych od nich dodatnich cząstek.
- Pierwszym modelem budowy atomu był model Thomsona. Zgodnie z tym modelem atom był ciężką kulą o ładunku dodatnim, w którą poutykane były elektrony. Model ten określany był jako ciastko z rodzynkami.
- Pewnym problemem były także widma promieniowania atomów, które były liniowe, tzn. składały się z pojedynczych prążków o określonych długościach fal.



Trzy serie widmowe atomu wodoru.

- Widmo promieniowania atomu wodoru dawało się dobrze opisywać wzorami empirycznymi. Jednakże mechanizm jego powstawania był niejasny.
- W modelu „ciastka z rodzynekami” dawało się co prawda tłumaczyć fakt, że widmo było liniowe (jako skutek ruchu wzbudzonych elektronów pod wpływem nieliniowej siły działającej ze strony atomu na elektron), ale model dawał złe wyniki ilościowe.

- **Doświadczenie Rutheforda.** Rutheford zajmował się badaniem absorpcji cząsteczek α emitowanych przez rad.



Schemat aparatury Rutherforda do badania rozproszenia cząstek alfa

Zdarzały się cząsteczki odchylone o bardzo duży kąt, a nawet odbite od folii, co nie dało się wytłumaczyć w ramach modelu „ciastka z rodzynekami”.

Rutheford w 1911 r. opracował własny model budowy atomu: atom składał się z niewielkiego, dodatniego, ciężkiego jądra wokół którego w dość dużej odległości krążyły elektrony. Model dawał dobre wyniki, jeżeli chodzi o rozpraszanie cząstek α , ale nie tłumaczył powstawania liniowego widma promieniowania atomu. Poza tym taki atom powinien być nietrwały – elektron krążący wokół jądra poruszałby się ruchem przyspieszonym i zgodnie z prawami Maxwella powinien promieniować falę elektromagnetyczną, tracąc jednocześnie swoją energię, ostatecznie spadając na jądro.

- **Model atomu Bohra (1913 r.).** Niels Bohr zaproponował model budowy atomu wodoropodobnego (atomu z jednym elektronem). Model podobny jest do modelu Rutheforda.

Aby wyeliminować wady modelu Rutheforda Bohr przyjął następujące dwa postulaty:

- *Stan atomu, w którym elektron porusza się po orbicie takiej, że jego moment pędu jest równy całkowitej wielokrotności stałej Plancka podzielonej przez 2π są stanami stacjonarnymi, tzn. w tych stanach elektron (wbrew prawom Maxwella!) nie promieniuje fali elektromagnetycznej:*

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

- *Na skutek oddziaływania z czynnikami zewnętrznymi istnieje możliwość przejścia ze stanu stacjonarnego o momencie pędu $n_1 h/2\pi$ do stanu stacjonarnego o momencie pędu $n_2 h/2\pi$. Takim przejściom towarzyszy emisja lub absorpcja promieniowania o częstotliwości:*

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

gdzie E_1 i E_2 odpowiednio oznaczają całkowitą energię początkową i końcową atomu.

Bohr ponadto założył, że w atomie obowiązują prawa mechaniki klasycznej, prawo Coulomba (a więc i prawa Maxwella) i dla uproszczenia przyjął, że elektron porusza się po orbicie kołowej.

Z założeń Bohra mamy:

$$F = \frac{Ze \cdot e}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = m a_{\text{dośrodko}} = \frac{m_e v^2}{r}$$

a stąd:

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e r}$$

Jednocześnie

$$m_e v r = \frac{nh}{2\pi}$$

a stąd

$$v = \frac{nh}{2\pi m_e r}$$

Dalej mamy:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m_e^2 r^2}$$

$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{Ze^2 \pi m_e}$$

Ponieważ

$$E_p = - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_k = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2} m_e \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = E_p + E_k = - \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Energia elektronu na n -tej dozwolonej orbicie wynosi:

$$E_n = - \frac{m_e e^4 Z^2}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Ponieważ

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}$$

częstotliwość promieniowanej fali przy przejściu z orbity n_1 na n_2 wynosi:

$$\nu = \frac{m_e e^4 Z^2}{8 \epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

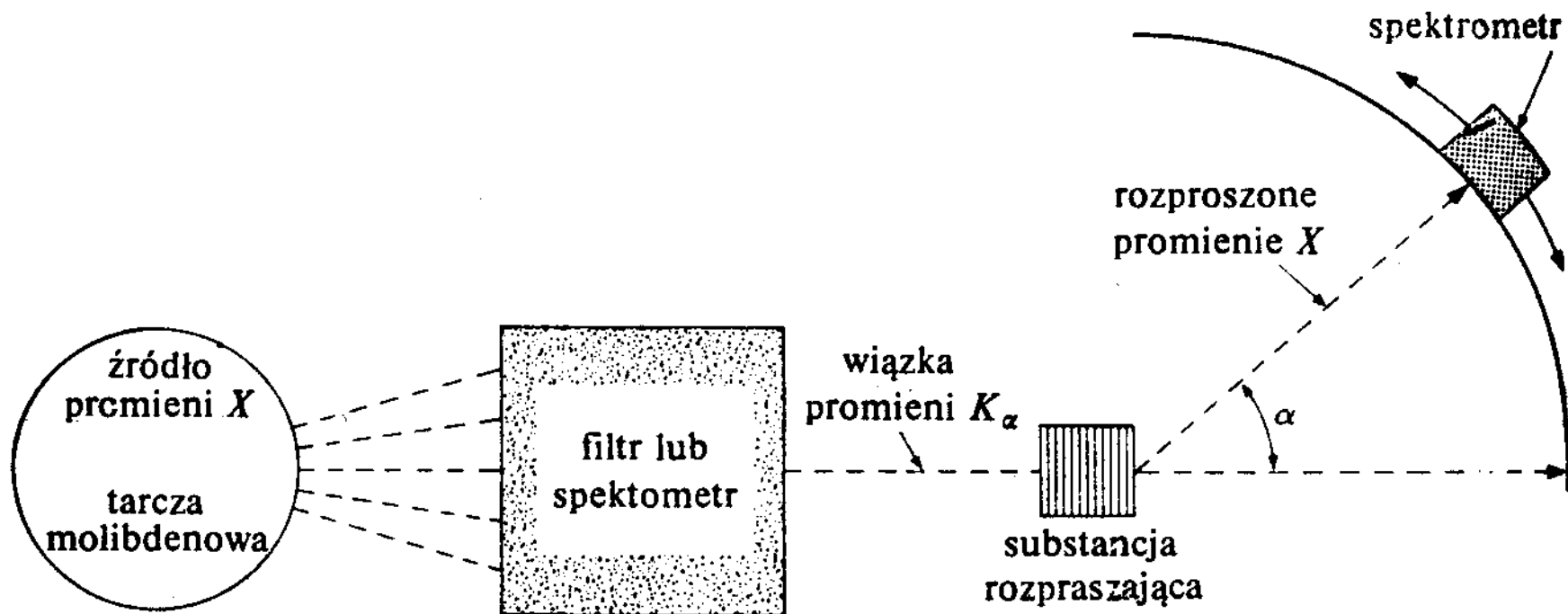
Wartość ta zgadza się z doświadczeniem.

- **Wady teorii Bohra:**

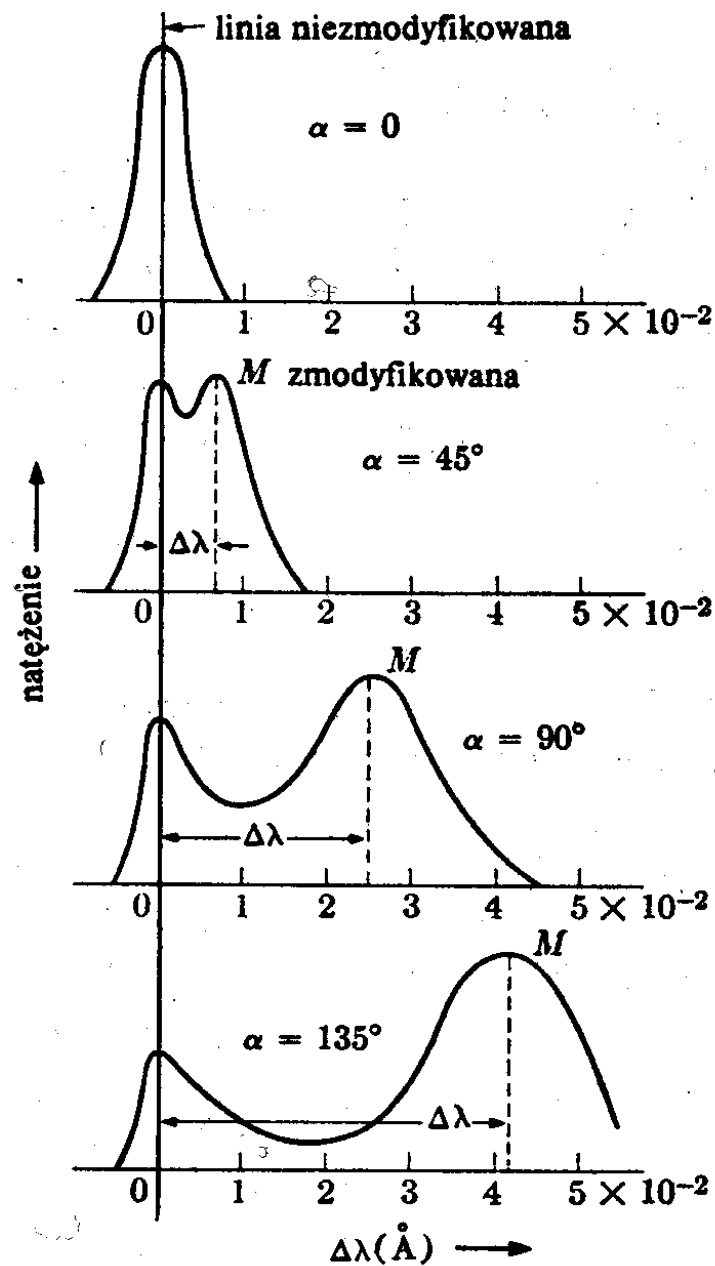
- wzajemnie sprzeczne założenia
- warunek skwantowania momentu pędu elektronu jest spełniony tylko dla atomów o jednym elektronie
- teoria nie wyjaśniała szeregu zjawisk, takich jak np. rozszczepienie linii widmowych (obserwowane w spektroskopach o dużej rozdzielczości), nie pozwalała określić natężenia promieniowania dla poszczególnych linii widmowych ani czasu życia atomów w stanach wzbudzonych

Efekt Comptona

- Zjawisko jest podobne do efektu fotoelektrycznego, ale zachodzi przy dużo wyższych energiach kwantu promieniowania (promieniowanie rentgenowskie).

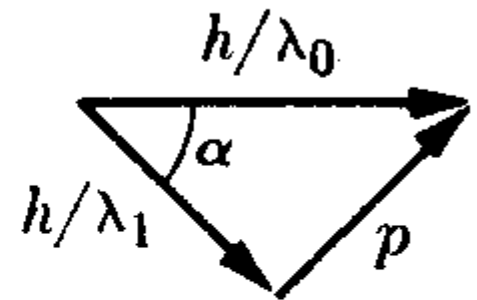
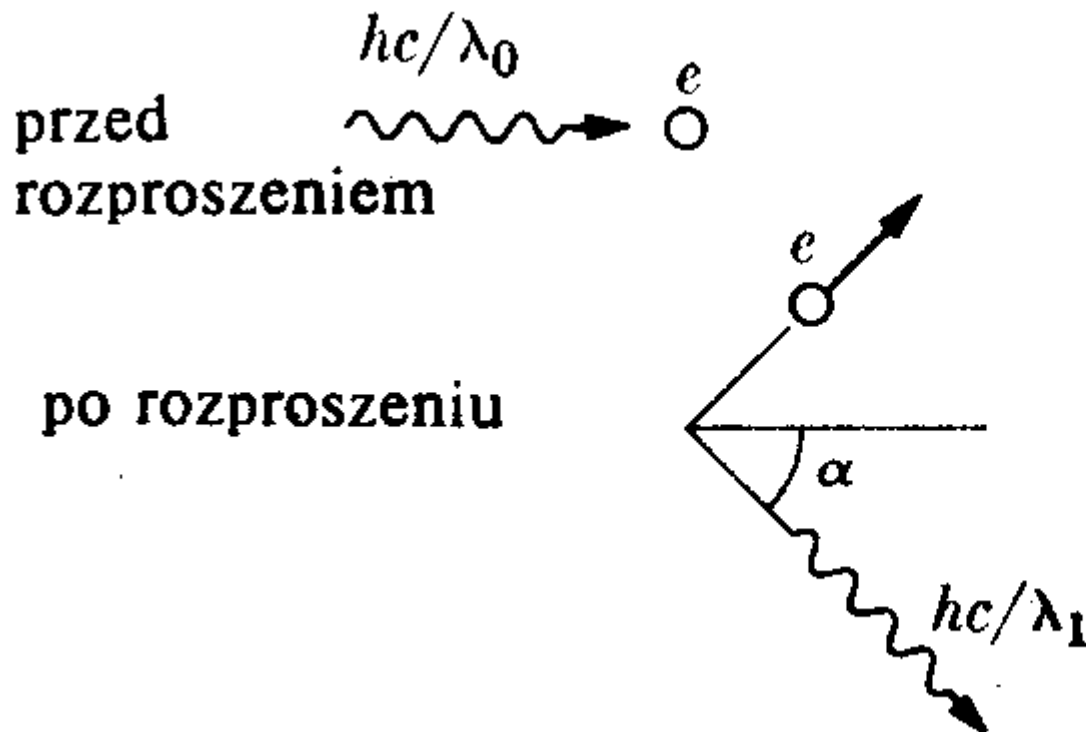


Schemat aparatury do pomiaru rozproszenia comptonowskiego



Przesunięcie linii zmodyfikowanej M promieniowania K_α molibdenu
w funkcji kąta rozproszenia

- Rozpatrując efekt Comptona musimy posługiwać się mechaniką relatywistyczną (ze względu na duże energie i pędy cząstek).
- Spełniona powinna być zasada zachowania pędu jak i zasada zachowania energii.



$$\frac{E_e^2}{c^2} - p_e^2 = m_e^2 c^2 \Rightarrow p_e^2 = \frac{E_e^2}{c^2} - m_e^2 c^2$$

$$p_e^2 = \frac{\left[m_e c^2 - \left(\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} \right) \right]^2}{c^2} - m_e^2 c^2 = \left(m_e c + \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda_1} \right)^2 - m_e^2 c^2$$

$$p_f = \frac{E_f}{c} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\frac{h^2}{\lambda_0^2} + \frac{h^2}{\lambda_1^2} - 2 \frac{h}{\lambda_0} \frac{h}{\lambda_1} \cos \alpha = \left(m_e c + \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda_1} \right)^2 - m_e^2 c^2$$

$$2 \frac{h^2}{\lambda_0 \lambda_1} (1 - \cos \alpha) = 2 m_e c \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda_1} \right)$$

- Ostatecznie mamy:

$$\frac{h}{m_e c} (1 - \cos \alpha) = \lambda_1 - \lambda_0$$

- Efekt Comptona dowodzi zarówno własności korpuskularnych jak i falowych promieniowania rentgenowskiego.

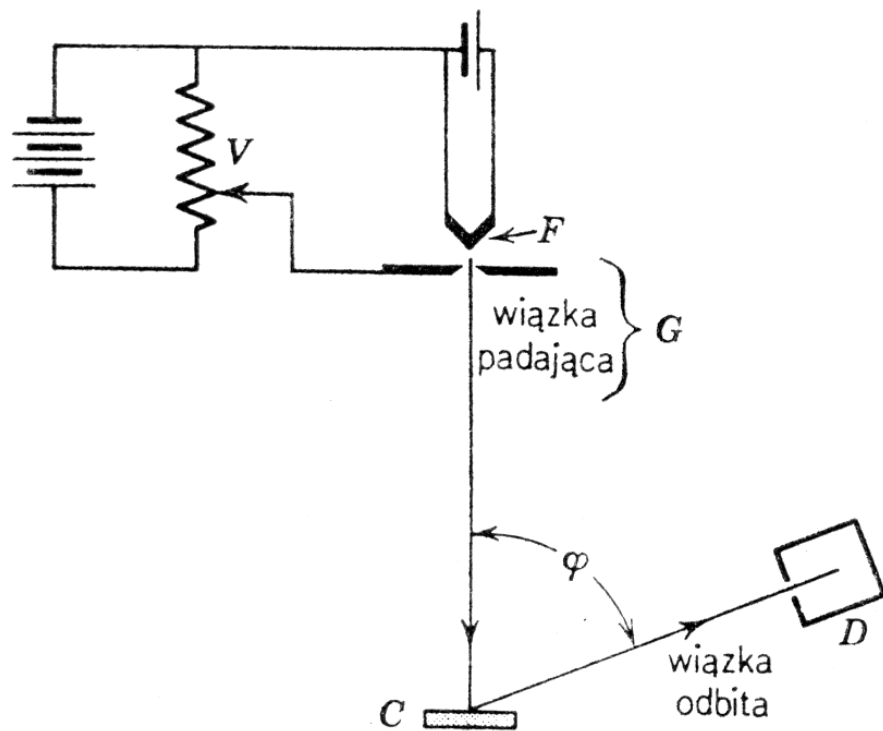
Mechanika falowa

Fale de Broglie'a

- W 1924 r. francuski uczony Louis de Broglie na podstawie teoretycznych rozważań doszedł do następujących wniosków:
 - Pod wieloma względami przyroda jest zadziwiająco symetryczna.
 - Nasz dostrzegalny wszechświat składa się wyłącznie ze światła i materii.
 - Jeżeli światło ma dwoistą (falowo-cząstkową) naturę, to być może i materia ma taką samą naturę.
- De Broglie uznał, że długość fali materii powinna być określona tym samym wzorem, co długość fali światła:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Doświadczenie Davissona-Germera



Aparat Davissona i Germera. Elek-
trony z gorącego włókna F są przyspieszane przez
dającą się zmieniać różnicę potencjałów V . Po
„odbiciu” od kryształu C trafiają do detekto-
ra D

- Doświadczenie Davissona-Germera potwierdziło falowe właściwości materii (elektronów).

Równanie Schrödingera

- Ponieważ materia ma właściwości falowe, powinno być spełnione jakieś równanie falowe. Równanie to podał w 1927 r. Erwin Schrödinger:

$$i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, z, t) = \left[U(x, y, z, t) - \frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \right] \psi(x, y, z, t)$$

gdzie:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad U(x, y, z, t) \text{ oznacza potencjał}$$

pola sił, w którym znajduje się układ, m – masa cząstki.

- Kwadrat modułu amplitudy funkcji falowej określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie o współrzędnych (x,y,z) w chwili czasu t :

$$\rho(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z, t)|^2$$

Oczywiście zachodzi:

$$\int |\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz = 1$$

(bo cząstka gdzieś na pewno jest).

Paczki falowe i zasada nieoznaczoności Heisenberga

- W znanym nam świecie cząstki materii są całkiem dobrze zlokalizowane (znajdują się w pewnym obszarze przestrzeni, a nie wszędzie). W związku z tym funkcja (zespolona) ψ ma dużą amplitudę w pewnym ograniczonym obszarze przestrzeni.
- Na wykładzie nt. fal mechanicznych powiedziałem, że każdą funkcję falową (falę) możemy rozłożyć na fale sinusoidalne. W związku z tym funkcja ψ opisująca cząstkę jest sumą pewnych funkcji falowych o określonych, różnych wartościach długości fali (paczką falową). Z długością fali związany jest pęd cząstki:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

- Wynika z tego, że pęd cząstki nie jest dobrze określony. Dokładna analiza problemu pokazuje, że zachodzi:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$$

gdzie Δx – błąd pomiaru współrzędnej położenia x , Δp_x – błąd pomiaru składowej x -wej pędu.

- Zasadę nieoznaczoności można uzasadnić jakościowo w następujący sposób: spróbujmy zmierzyć położenie cząstki. Aby to zrobić muszę ją „oświetlić”. Używając światła o długości fali λ mogę określić położenie cząstki z dokładnością mniej więcej do λ , więc im dokładniej chcę zmierzyć jej położenie, tym krótszych fal muszę użyć. Ale światło oddziałując z moją cząstką przekaże jej pewną energię, tym większą, im większa jest energia kwantu światła. Im mniejsza jest λ , tym większa energia kwantu i tym większy może być pęd przekazany mojej cząstce.

- Zasada nieoznaczoności nie dotyczy tylko położenia i pędu - nie wszystkie wielkości dadzą się mierzyć jednocześnie bez wzajemnego wpływu na siebie. Innym przykładem jest energia i czas:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

co oznacza, że aby zmierzyć nieskończenie dokładnie energię, trzeba by mierzyć ją nieskończenie długo.

- Zasada nieoznaczoności została podana w 1927 r. przez W. Heisenberga.