

Elektrostatyka

Trochę historii

- Zjawisko elektryzowania się niektórych ciał było znane już w starożytności. O zjawisku przyciągania drobnych, lekkich ciał przez potarty suknem bursztyn wspomina Tales z Miletu (ok.. 600 lat p.n.e.).
- Zjawisko elektrycznego odpychania po raz pierwszy zaobserwował Otto von Guericke (1672 r.).
- Na przełomie roku 1733 i 1734 Ch. F. Du Fay odkrył „istnienie dwóch rodzajów elektryczności” przeciwstawiając „elektryczność żywiczną elektryczności szklanej”. Dziś powiedzielibyśmy, że zaobserwował istnienie dwóch rodzajów ładunków elektrycznych.
- Przełomowym momentem w rozwoju elektrostatyki było doświadczalne odkrycie w 1785 r. przez Ch. A. Coulomba prawa opisującego w sposób ilościowy oddziaływania ładunków elektrycznych.

Pojęcie ładunku elektrycznego

- Natura ładunku elektrycznego jest ziarnista (kwantowa), tzn. ładunki nie występują w przyrodzie w dowolnych ilościach, lecz tylko w takich porcjach, które są całkowitą wielokrotnością pewnego *ładunku elementarnego*, którym jest ładunek elektronu.
- Elektryzowanie się ciał polega na gromadzeniu się na nich nadmiaru elektronów lub powstawaniu ich niedoboru.
- Wartość ładunku elementarnego jest bardzo mała w porównaniu z ładunkami, jakich używamy w doświadczeniach, dlatego bardzo często możemy przyjąć, że ładunek może przyjmować wartości ciągłe (choć jest to przybliżenie, to jest ono bardzo dobre).
- Jednostką ładunku elektrycznego w układzie SI jest kulomb ($1\text{C}=1\text{A}\cdot 1\text{s}$). Jeden ładunek elementarny to około $1,6\cdot 10^{-19}\text{C}$.

Podstawowe pojęcia

- *Ładunkiem punktowym* będziemy nazywać punkt geometryczny, obdarzony niezerowym ładunkiem elektrycznym.
- W pewnych sytuacjach istotne jest rozmieszczenie ładunków na pewnych liniach, powierzchniach lub w objętościach. Wygodnie jest wówczas określać wielkość ładunku i sposób ich rozmieszczenia za pomocą *gęstości ładunku* (odpowiednio: liniowej, powierzchniowej i objętościowej).

$$\sigma_l = \frac{dq}{dl}, \quad \sigma_s = \frac{dq}{dS}, \quad \sigma_v = \frac{dq}{dV}$$

Prawo Coulomba

- Prawo Coulomba charakteryzuje oddziaływanie między dwoma ładunkami punktowymi:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

gdzie F_{12} jest siłą, z jaką działa ładunek q_1 na ładunek q_2 , zaś r_{12} wektorem poprowadzonym od ładunku q_1 do ładunku q_2 , a ε_0 pewną stałą (przenikalnością dielektryczną próżni).

- Oddziaływanie ładunków nie następuje bezpośrednio (nie mają one bezpośrednio kontaktu między sobą), a za pośrednictwem *pola elektrostatycznego*, tzn. ładunek zmienia właściwości przestrzeni wokół siebie wytwarzając pewne *pole sił elektrostatycznych* i dopiero to pole oddziałuje na inne ładunki.

- Przedmiotem elektrostatyki są oddziaływania zachodzące między ładunkami elektrycznymi za pośrednictwem pola elektrostatycznego i związane z tymi oddziaływaniami zjawiska. Należy podkreślić, że ładunki wytwarzające pola muszą być niezmiennie w czasie i pozostawać w spoczynku

Wielkości charakteryzujące pole elektrostatyczne

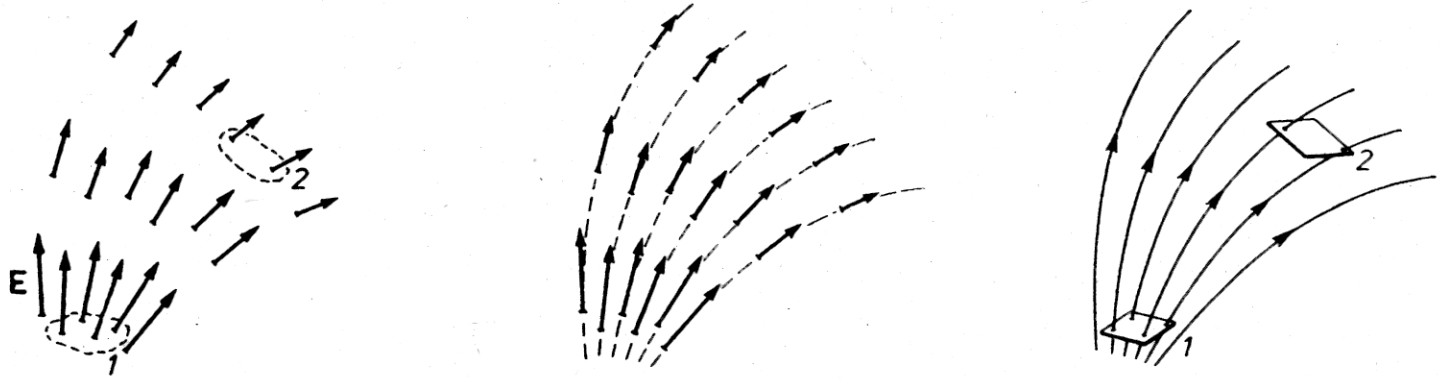
- Wektorem *natężenia pola elektrostatycznego* w danym punkcie nazywamy wektor równy stosunkowi siły F , jaka działałaby na umieszczony w tym punkcie dodatni, nieruchomy ładunek próbny q_0 do tego ładunku:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Zakładamy przy tym, że ładunek próbny nie bierze udziału w tworzeniu pola i nie zakłóca go

- Jednostką natężenia pola jest N/C lub (częściej używana) V/m

- Wygodnym sposobem graficznego przedstawienia pola jest wprowadzenie pojęcia linii sił pola. *Liniami sił* nazywamy krzywe, które byłyby styczne w każdym punkcie do wektora natężenia pola E .



- Otrzymane w ten sposób linie są skierowane – ich kierunek jest określony przez zwrot wektorów E .
- Kreśląc linie sił przyjmuje się następującą umowę: gdyby poprowadzić powierzchnię prostopadłą w każdym punkcie do linii pola sił, to liczba linii sił przypadająca na jednostkę tej powierzchni powinna być proporcjonalna do natężenia pola

- *Strumieniem wektora natężenia pola elektrostatycznego przez powierzchnię ds nazywamy wielkość*

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Prawo Gaussa

- Weźmy ładunek punktowy q i pewną dowolną powierzchnię zamkniętą S otaczającą ten ładunek. Strumień wektora pola elektrostatycznego przez nieskończenie mały wycinek tej powierzchni ds wynosi

$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot \vec{ds} = \vec{E} \cdot \vec{n} ds$$

gdzie n jest jednostkowym wektorem normalnym do ds . Korzystając z prawa Coulomba i definicji wektora natężenia pola mamy

$$d\Psi_E = \frac{q \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2} ds$$

gdzie θ jest kątem między wektorami n i E

- Ponieważ E ma kierunek prostej łączącej ładunek z elementem powierzchni ds , to

$$\cos \theta ds = r^2 d\Omega$$

gdzie $d\Omega$ jest elementem kąta bryłowego rozpiętego na powierzchni ds względem punktu położenia ładunku. Stąd mamy

$$d\Psi_E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} d\Omega$$

- Całkowity strumień pola elektrycznego przez powierzchnię S będzie sumą (całką) strumieni przenikających wszystkie elementy powierzchni ds , na jakie możemy podzielić powierzchnię S .

- Całkując obustronnie ostatnie równanie otrzymujemy

$$\Psi_E = \oint_S d\Psi_E = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

- Ponieważ pole wytwarzane przez wiele ładunków jest superpozycją pól wytwarzanych przez poszczególne ładunki (wektor siły wypadkowej jest sumą wektorów poszczególnych sił działających na ładunek), to dla wielu ładunków mamy:

$$\oint_S d\Psi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

- Równanie to nosi nazwę *prawa Gaussa*. Wynika ono z prawa Coulomba, ale jest od niego bardziej ogólne.

Potencjał pola elektrostatycznego i energia potencjalna

- Rozpatrzmy pole elektrostatyczne wytwarzane przez ładunek punktowy q . umieszczony w początku układu współrzędnych kartezjańskich. Niech funkcja $V(r)$ będzie zdefiniowana równaniem

$$V(r) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- Umieśćmy w polu wytwarzanym przez ładunek q ładunek punktowy q_0 w punkcie o (x,y,z) .

- Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}[-q_0 V(r)] &= \frac{-qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= \frac{-qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2x}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r} = F_x\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[-q_0 V(r)] = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{y}{r} = F_y$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[-q_0 V(r)] = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r} = F_z$$

- Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy na pierwszym wykładzie omawiając zasadę zachowania energii, wielkość

$$q_0 V(r) = \frac{qq_0}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

jest energią potencjalną ładunku q_0 w polu wytwarzanym przez ładunek q :

$$E_p = \frac{qq_0}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

a siły oddziaływań elektrostatycznych są siłami zachowawczymi.

- Z faktu, że siły oddziaływań elektrostatycznych są siłami zachowawczymi wynika, że:

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Stąd i definicji natężenia pola elektrostatycznego mamy dla dowolnej krzywej L :

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

gdzie $d\vec{l}$ jest wektorem stycznym do krzywej L . Z powyższego prawa wynika, że linie sił pola elektrostatycznego nie są nigdy zamknięte (pole jest bezwirowe)

- Wielkość

$$V = \frac{E_p}{q_0}$$

nazywamy *potencjałem elektrostatycznym pola*.

Magnetostatyka

Pole magnetyczne

- *Polem magnetycznym* będziemy nazywać taki stan przestrzeni, w którym na poruszające się ładunki działają siły.
- Na poruszający się w polu magnetycznym ładunek elektryczny q działa siła Lorentza równa

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

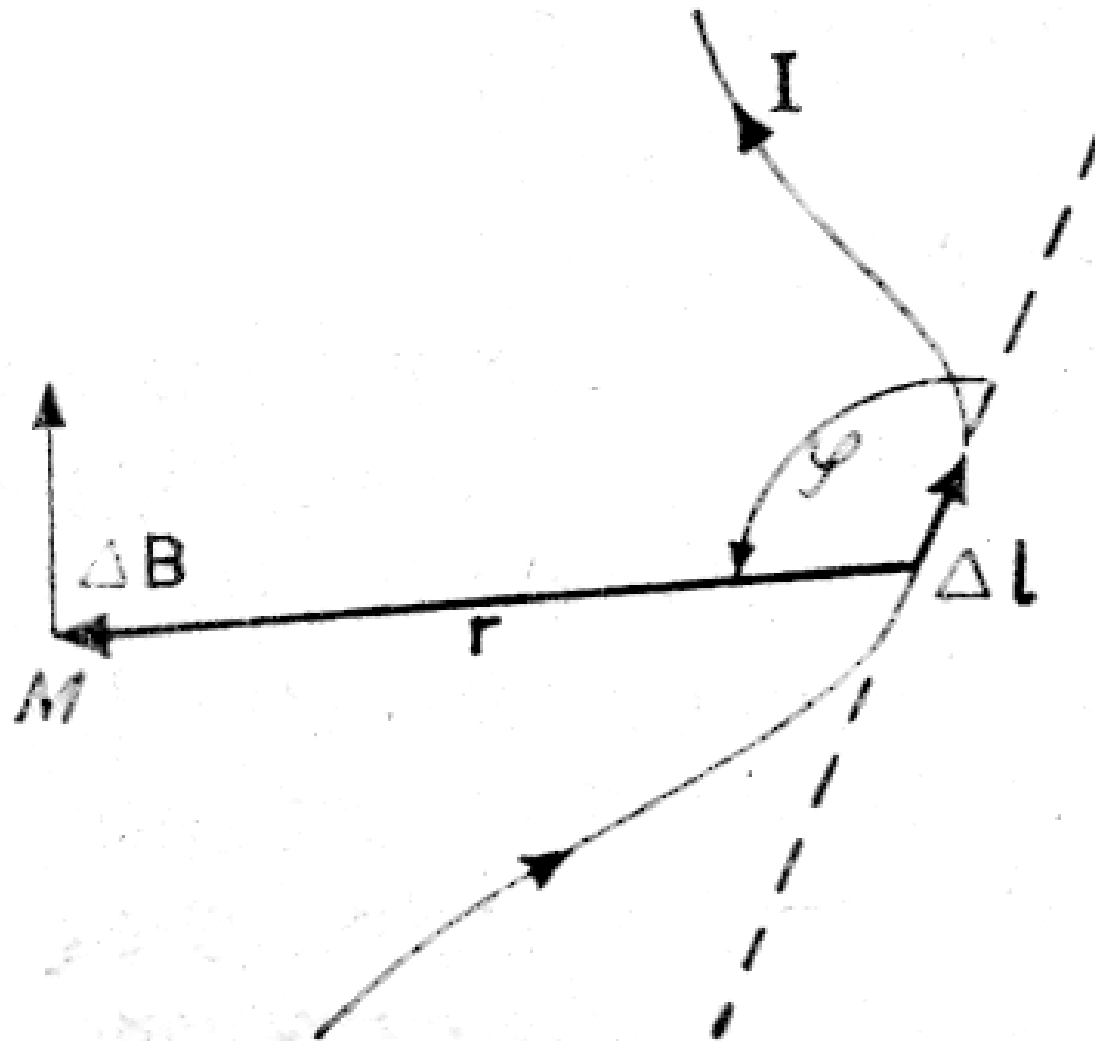
gdzie $\vec{v}$ jest wektorem prędkości ładunku, zaś $\vec{B}$ oznacza wektor indukcji magnetycznej (opisujący pole magnetyczne)

- Pole magnetyczne oddziałuje również na przewodniki, w których płynie prąd. Na element przewodnika o długości dl działa siła $d\vec{F}$ równa

$$\overrightarrow{dF} = I \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{dl}$$

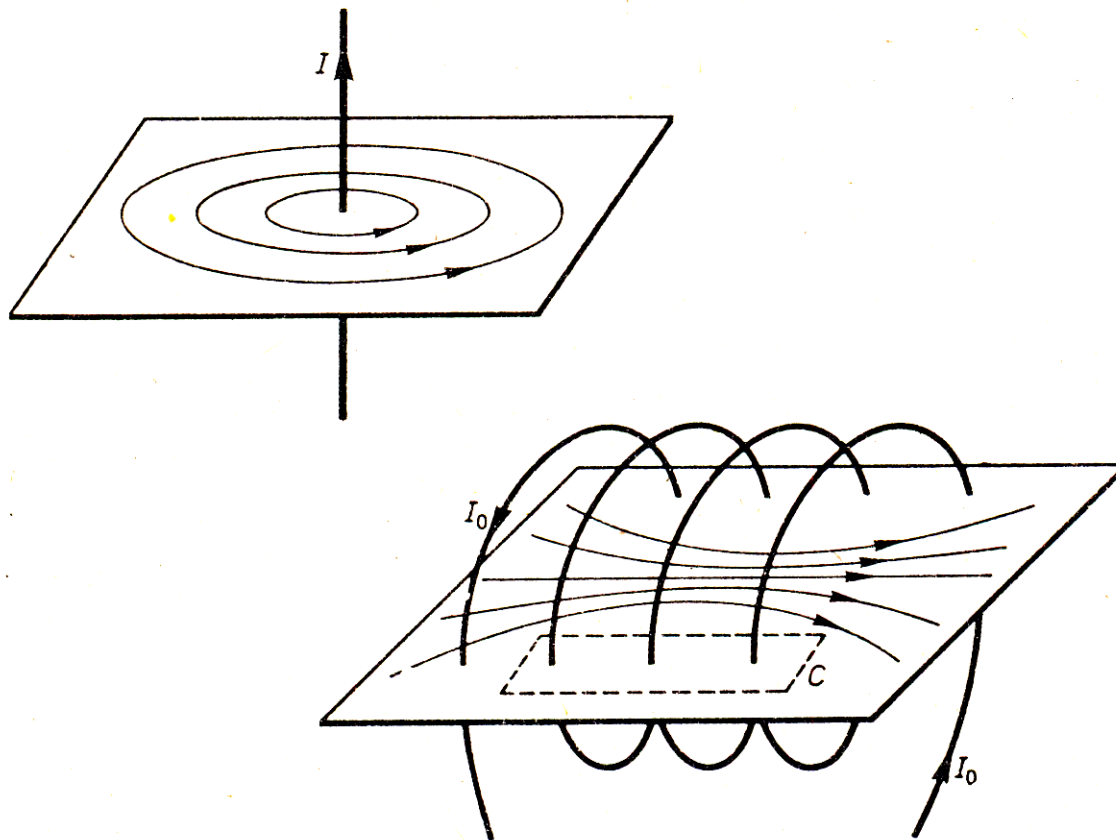
gdzie $\overrightarrow{dl}$ jest wektorem stycznym do przewodnika skierowanym w kierunku przepływu prądu. Jest to tzw. siła elektrodynamiczna i jest ona skutkiem z siły Lorentza działającej na ładunki poruszające się w przewodniku.

- Obserwując oddziaływanie pól magnetycznych na poruszające się ładunki można stwierdzić, że pola magnetyczne powstają wytwarzają je wyłącznie bądź prądy płynące w przewodnikach, bądź wiązki ładunków (np. w próżni), bądź pewne ciała – magnesy trwałe. Fakt wytwarzania pól magnetycznych przez magnesy trwałe spowodowany jest płynięciem prądów na poziomie molekularnym (mikroskopowym).
- Pole magnetyczne wytwarzane przez przewodnik, w którym płynie prąd opisane jest przez prawo Biota-Savarta:



$$\overrightarrow{\Delta B} = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{\Delta l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Właściwości pola magnetycznego



- Linie indukcji pola magnetycznego są zawsze zamknięte.

- Skutkiem tego dla dowolnej powierzchni zamkniętej S zachodzi:

$$\oint_S d\Psi_B = 0$$

gdzie $d\Psi_B = \vec{B} \cdot \vec{ds}$ jest strumieniem pola magnetycznego. Prawo to nazywa się niekiedy *prawem Gaussa w magnetostatyce*.

- Z prawa Biota-Savarta wynika prawo Ampera:

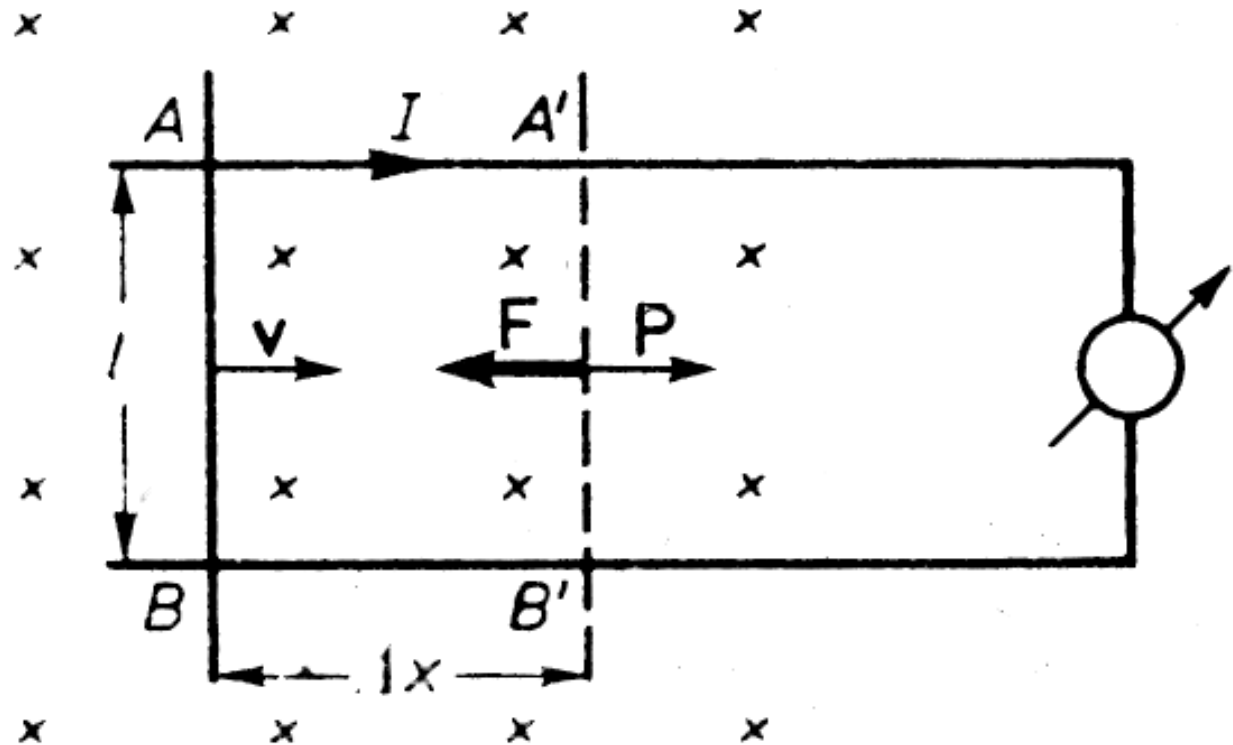
$$\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum_k I_k$$

gdzie całkowanie odbywa się po dowolnej krzywej zamkniętej, a I_k oznaczają prądy przepływające przez dowolną powierzchnię rozpiętą na tej krzywej.

Prawa Maxwella

Indukcja elektromagnetyczna

- Wyobraźmy sobie następujący eksperyment. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B umieścimy w płaszczyźnie prostopadłej do wektora indukcji dwie równoległe metalowe szyny odległe od siebie o odcinek l .



- Do szyn dołączony jest galwanometr rejestrujący przepływ prądu. Ponadto po szynach może ślizgać się bez tarcia łączący je przewodnik o długości l . Niech przewodnik ten porusza się ze stałą prędkością v w kierunku zaznaczonym na rysunku.
- Na swobodne elektrony znajdujące się w poruszającym się przewodniku działa siła Lorentza, która spowoduje przesunięcie ich w kierunku końca połączonego z dolną szyną, na skutek czego powstanie różnica potencjałów między końcami przewodnika (siła elektromotoryczna indukcji ε) i w obwodzie popłynie pewien prąd I .
- Na skutek przepływu prądu, na poruszający się przewodnik będzie działać siła elektrodynamiczna $F = BIl$ w kierunku przeciwnym do wektora prędkości przewodnika.

- Aby przewodnik poruszał się nadal ze stałą prędkością, konieczne jest przyłożenie do niego siły P równoważącej siłę F . W czasie Δt siła ta wykona pracę

$$W = P \Delta x = F v \Delta t = B I l v \Delta t$$

- W tym samym czasie prąd elektryczny przepływający w obwodzie wykona pracę równą

$$W_I = \varepsilon I \Delta t$$

- Z zasady zachowania energii wynika, że prace te powinny być równe:

$$W = W_I$$

- Zatem

$$B l v \Delta t = \varepsilon I \Delta t$$

- Wynika stąd, że

$$\varepsilon = B l v$$

- Ponieważ

$$l v = \frac{dS}{dt}$$

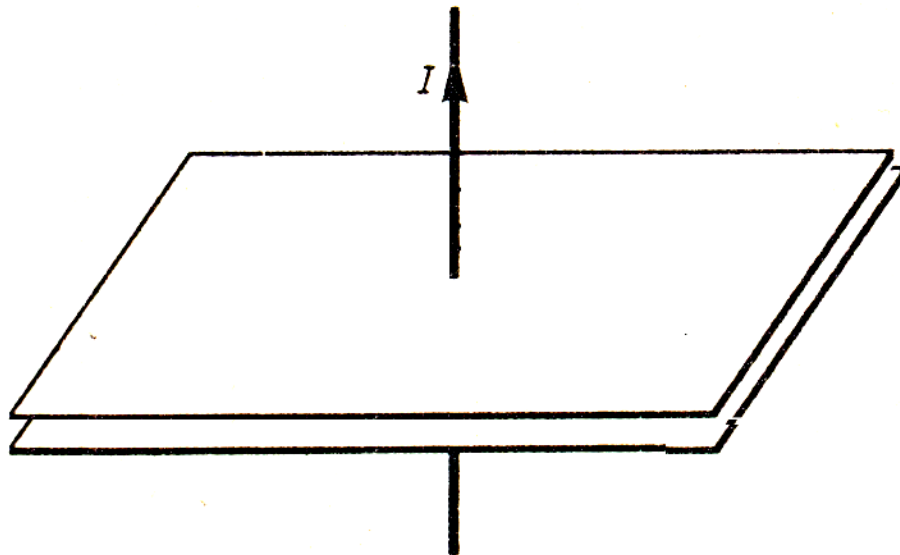
gdzie S oznacza pole powierzchni obwodu elektrycznego utworzonego z szyn, galwanometru i poruszającego się przewodnika, korzystając z definicji strumienia pola magnetycznego mamy:

$$\varepsilon = \frac{d\Psi_B}{dt}$$

- Powyższe równanie nazywamy *prawem indukcji elektromagnetycznej Faradaya*.

Poprawka do prawa Ampera. Prąd przesunięcia

- Wyobraźmy sobie przewodnik, w który włączony został szeregowo kondensator.



- Weźmy krzywą zamkniętą obejmującą przewodnik, ale rozepnijmy na tej krzywej powierzchnię w taki sposób, by nie przechodził przez nią przewodnik z prądem, tzn. tak, aby powierzchnia ta przechodziła między okładkami kondensatora.
- Prawo Ampera w takiej sytuacji przywidywało brak pola magnetycznego wytworzonego przez prąd płynący w przewodniku. Trzeba „poprawić” prawo Ampera.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_k I_k + \varepsilon_0 \frac{d\Psi_E}{dt} \right)$$

- Wielkość $\varepsilon_0 \frac{d\Psi_E}{dt}$ nazywana jest prądem przesunięcia.

Wszystkie prawa elektromagnetyzmu

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_k I_k + \varepsilon_0 \frac{d\Psi_E}{dt} \right)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Psi_B}{dt}$$

$$\oint_S d\Psi_B = 0$$

$$\oint_S d\Psi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

- Powyższe 4 równania nazywamy *prawami Maxwella*. Do kompletu można dodać równanie opisujące oddziaływanie ładunków z polami:

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$