

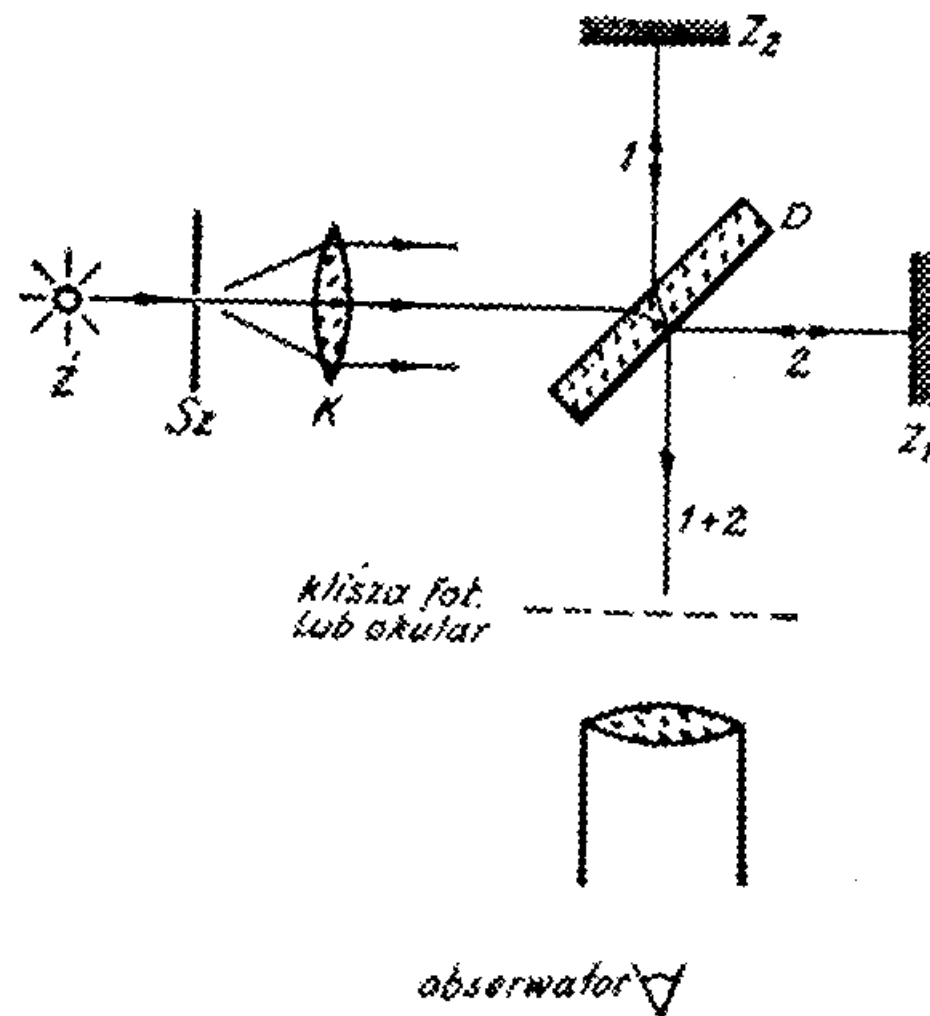
Mechanika relatywistyczna

Koncepcja eteru

- **Eter kosmiczny** miał być specyficznym ośrodkiem, wypełniającym całą przestrzeń, który miał być nośnikiem fal świetlnych (później w ogóle pola elektromagnetycznego).
- W XIX w. nikt już nie wierzył, że Ziemia jest jakimś szczególnie wyróżnionym układem odniesienia, więc uważano, że powinna ona poruszać się względem eteru
- Z tego powodu prędkość światła powinna zależeć od kierunku jego rozchodzenia się (np. być mniejsza, gdy mierzy się ją w kierunku zgodnym z ruchem Ziemi względem eteru, a większa – gdy zmierzy się ją w kierunku przeciwnym)

Doświadczenie Michelsona-Morleya

- Doświadczenie miało na celu bezpośrednie sprawdzenie ruchu źródła światła na prędkość światła, a pośrednio – sprawdzenie, czy istnieje eter kosmiczny.
- W celu wykonania doświadczenia został wykorzystany *interferometr Michelsona*
- Interferometr Michelsona służy do precyzyjnego pomiaru długości fal świetlnych. Jego zasada działania opiera się na interferencji światła.



Schemat dwuwiaźkowego interferometru Michelsona: Z — źródło światła, Sz — szczelina, K — soczewka kolimatora, D — płytka płasko-równoległa pokryta po jednej stronie warstwą półprzepuszczalną, Z_1 , Z_2 — zwierciadła płaskie, 1 , 2 — wiązki świetlne

- Załóżmy, że wiązki światła rozchodzą się w tym samym ośrodku o współczynniku załamania n oraz, że droga geometryczna l_1 przebyta przez wiązkę nr 1 jest większa od drogi geometrycznej l_2 , przebytej przez wiązkę nr 2.
- Prążki interferencyjne powstaną w tych miejscach, w których

$$n(l_2 - l_1) = m\lambda$$

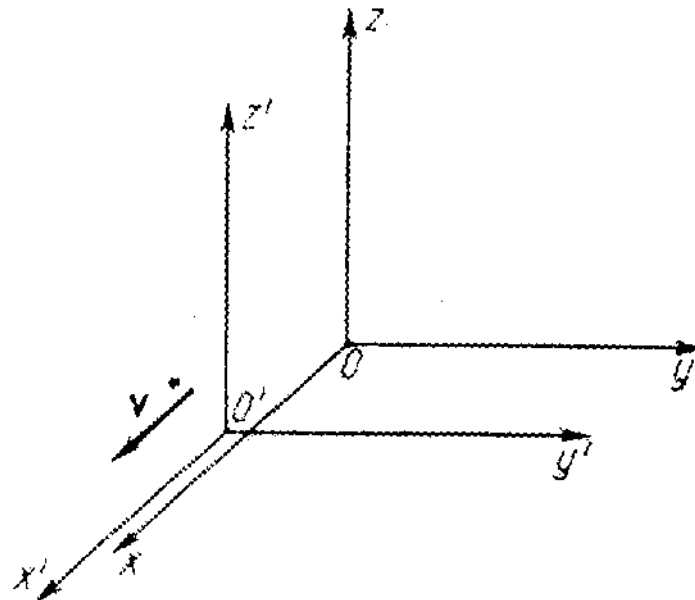
- Ponieważ długość fali zależy od jej prędkości ($\lambda = v/f$, gdzie v – prędkość fali, zaś f – jej częstotliwość), położenie prążków interferencyjnych powinno zmienić się po obrocie interferometru o 90 stopni. Efektu tego jednak nie zaobserwowano, co świadczy o tym, że prędkość rozchodzenia się światła na Ziemi nie zależy od kierunku jego rozchodzenia się.

Postulaty Einsteina

- *Wszystkie tożsame zjawiska fizyczne przebiegają, przy identycznych warunkach początkowych, jednakowo we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Innymi słowy: wśród inercjalnych układów odniesienia nie ma żadnego układu „uprzywilejowanego”.*
- *Prędkość światła w próżni jest jednakowa we wszystkich kierunkach i w dowolnym obszarze danego inercjalnego układu odniesienia i jednakowa dla wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Oznacza to brak jakichkolwiek „wyróżnionych” kierunków i obszarów przestrzeni ze względu na prędkość rozchodzenia się światła.*

Transformacja Lorentza jako konsekwencja postulatów Einsteina

- To, co zachodzi w danym punkcie w danym momencie czasu będziemy nazywać *zdarzeniem*.
- Rozpatrzmy dwa inercjalne układy odniesienia: spoczywający U i poruszający się względem niego ze stałą prędkością v wzdłuż osi OX układ U' .



- Przyjęte założenie nt. kierunku ruchu układu U' względem układu U nie jest istotnym ograniczeniem. Jeżeli oba układy mają być inercjalne, to ich względny ruch musi być ruchem jednostajnym, a dowolny kierunek ruchu można sprowadzić do ruchu wzdłuż osi OX poprzez odpowiedni obrót układu współrzędnych.
- Celem naszej analizy będzie znalezienie równań pozwalających znaleźć współrzędne (x', y', z', t') w układzie U' na podstawie współrzędnych (x, y, z, t) tego samego zdarzenia w układzie U .
- Poszukiwane równania powinny być zgodne z postulatami Einsteina.
- Z postulatów Einsteina wynika, że przestrzeń i czas w dowolnych inercjalnych układach odniesienia muszą być jednorodne.

- Konsekwencją powyższych dwóch faktów jest to, że związki między współrzędnymi zdarzenia w dwóch różnych układach odniesienia muszą być liniowe:

$$y=Ay', \quad z=Bz'$$

- Ponieważ żaden kierunek nie może być wyróżniony, musi zachodzić $A=B$. Pozostaje znaleźć wartość A .
- Weźmy linijkę o jednostkowej długości i umieśćmy ją na osi OY układu U tak, by jeden z jej końców znajdował się w początku układu współrzędnych. Ze względu na równoprawność układów inercjalnych, w chwili $t=t'=0$ obserwatorzy w układzie U i U' powinni zmierzyć tą samą długość linijki, a więc $A=1$.

- Dla osi współrzędnych x i x' sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana, ale związki między współrzędnymi zdarzenia w dwóch różnych układach odniesienia muszą być liniowe:

$$x' = A_{10} + A_{11}x + A_{12}t \quad (1)$$

i odwrotnie:

$$x = A_{20} + A_{21}x' + A_{22}t' \quad (2)$$

gdzie wszystkie współczynniki A_{ij} są stałymi.

- Jeżeli dodatkowo założymy, że w chwili $t=0$, $t'=0$ początki układów pokrywają się, otrzymujemy

$$A_{10}=0$$

$$A_{20}=0$$

- Współrzędna x' punktu O' w chwili t wynosi vt , więc z (1) mamy

$$0 = A_{11}vt + A_{12}t$$

- Czyli $A_{12}/A_{11}=-v$

- Oznaczając A_{11} przez Γ równanie (1) możemy zapisać w postaci:

$$x' = \Gamma (x - vt) \quad (3)$$

- Na podstawie analogicznych rozważań mamy

$$x = \Gamma (x' + vt') \quad (4)$$

- Łatwo się przekonać, że $\Gamma = \Gamma'$. Weźmy wzorec o długości równej l_0 w układzie własnym. Umieścmy go na osi x w układzie U w taki sposób, by jeden z jego końców leżał w początku układu współrzędnych. Współrzędne jego końców będą równe $x_1 = 0$, $x_2 = l_0$.

- W chwili $t=t'=0$ (układy U i U' są tożsame geometrycznie), zgodnie z (4) $x_1'=0$, $x_2'=l_0/\Gamma$, czyli

$$l'=x_2'-x_1'=l_0/\Gamma$$

- Weźmy ten sam wzorec i umieśćmy go w układzie U' . Podobne rozważania prowadzą do równania

$$l=x_2-x_1=l_0/\Gamma'$$

- Ponieważ oba układy są równouprawnione, to mamy $\Gamma'=\Gamma$.

- Wyznamy wartość stałej Γ . Załóżmy, że w chwili czasu $t=t'=0$ ze wspólnego początku układu współrzędnych został wysłany sygnał świetlny. Niech zdarzenie polega na dotarciu tego sygnału w określonej chwili (t w układzie U i t' w układzie U') do określonego punktu (x w układzie U i x' w układzie U'). Oczywiście

$$x=ct$$

$$x'=ct'$$

- Podstawiając x i x' do (3) i (4) otrzymujemy

$$ct'=\Gamma t(c-v)$$

$$ct=\Gamma t'(c+v)$$

- Mnożąc te równania stronami i upraszczając przez tt' , otrzymujemy:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

czyli ostatecznie

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

- Znajdźmy wyrażenia na t i t'
- Z (5) i (6) mamy

$$t = \frac{x - x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} = \frac{\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}$$

i dalej:

$$t = \frac{\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - x' \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{v} = \frac{x' + vt' - x' + x' \frac{v^2}{c^2}}{v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- I ostatecznie:

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)$$

- Analogiczne rachunki prowadzą do równania

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

- Zauważmy, że dla $v \ll c$ równania (5), (6), (7), (8) przybierają postać znaną z mechaniki klasycznej.

Dylatacja czasu

- Przypuśćmy, że w układzie U' znajduje się zegar odmierzający czas między dwoma zdarzeniami w punkcie (x', y', z') . Różnica czasu między tymi zdarzeniami w układzie U' wynosi:

$$\Delta t' = t_2' - t_1'.$$

- Z równania (7) wynika, że obserwator w układzie U zmierzy czas między tymi zdarzeniami równy

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Jak widać, $\Delta t > \Delta t'$. Wynika z tego, że poruszający się zegar „opóźnia się” w stosunku do zegara spoczywającego. Efekt ten nazywamy *dylatacją czasu*.

Skrócenie Lorentza

- Niech w układzie U' znajduje się pręt o długości l_0 , leżący na osi OX' układu. Niech jego końce znajdują się w punktach x_1' i x_2' .
- Z równania (5) mamy

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

czyli

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Zmierzona długość pręta będzie największa w układzie, w którym ten pręt spoczywa. W każdym innym układzie zmierzona długość pręta będzie mniejsza. Efekt ten nazywa się *skróceniem Lorentza*.

Paradoks bliźniąt

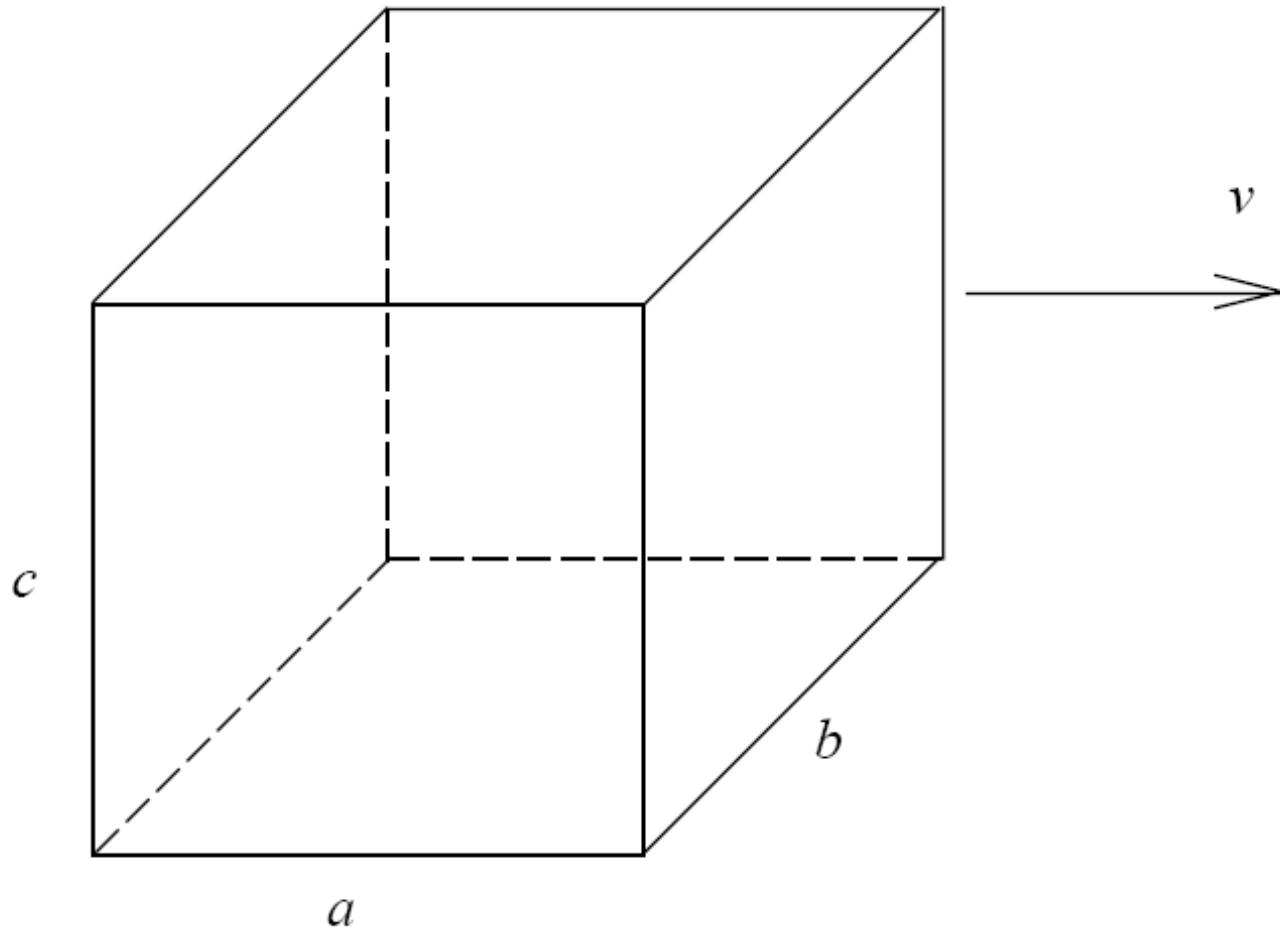
- Wyobraźmy sobie następujące doświadczenie: Niech będzie dwóch braci-bliźniaków. Jednego z nich wysyłamy w daleką podróż kosmiczną w bardzo szybkiej rakiecie, lecącej po linii prostej ze stałą prędkością v bliską prędkości światła c . W związku z efektem dylatacji czasu, biologiczny zegar brata-bliźniaka, który poleciał w podróż powinien opóźniać się w porównaniu z biologicznym zegarem brata-bliźniaka, który pozostał na Ziemi. Z tego powodu po powrocie z podróży, wiek biologiczny podróżującego brata-bliźniaka powinien być mniejszy od wieku biologicznego brata, który pozostał na Ziemi.
- Ale...

- Z punktu widzenia brata-bliźniaka, który poleciał w kosmos, to Ziemia wraz z jego bratem-bliźniakiem porusza się względem rakiety z dużą prędkością bliską prędkości światła. W związku z tym, według podróżującego w rakiecie brata-bliźniaka, po powrocie na Ziemię, to brat, który pozostał będzie młodszy od tego, który poleciał w podróż.
- Nie można *a priori* odrzucić żadnej z obu argumentacji, bo oba układy są równouprawnione, bo oba są układami inercyjnymi.
- Zgodnie z postulatami Einsteina, wyniki eksperymentu powinny być takie same (opinie braci-bliźniaków na temat ich wieku powinny być zgodne).
- Wygląda na to, że mamy paradoks, czyli teoria nie daje spójnych wyników, czyli jest niewiele warta?

- Tylko jak to zrobić, żeby brat-bliźniak poruszający się w rakiecie ze stałą prędkością po linii prostej wrócił do tego samego punktu, z którego wyleciał?

Fakty i mity, czyli o kształcie poruszających się szybko brył

- Wyobraźmy sobie świecący szkielet sześcianu poruszający się jak na rysunku z dużą prędkością v



- Wyobraźmy sobie, że dysponujemy aparatem fotograficznym z bardzo szybką migawką umożliwiającym wykonanie „nieporuszonej” fotografii tego sześcianu
- Fotografię wykonujemy „od dołu”, tzn. z takiej pozycji, że płaszczyzna, w której leży ściana o krawędziach oznaczonych literami a i b jest prostopadła do kierunku obserwacji.
- Co zobaczymy na fotografii?
- Krawędź b i krawędzie równoległe do niej zachowają swoje rozmiary.
- Krawędź a i krawędzie równoległe ulegną skróceniu lorentzowskiemu i na fotografii będzie miała długość

$$a' = a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$$

- Krawędź c i krawędzie równoległe do niej również będą widoczne na fotografii, gdyż na fotografii zostanie zarejestrowane światło, które dotrze do materiału światłoczułego w tej samej chwili. Światło pochodzące od krawędzi należących do górnej ściany sześcianu ma do przebycia drogę dłuższą o odcinek c , więc aby dotrzeć w tym samym czasie, co światło pochodzące od krawędzi dolnej ściany sześcianu musiało zostać wysłane wcześniej o czas

$$t=c/c_0,$$

gdzie c_0 oznacza tu prędkość światła. Z tego powodu na fotografii krawędź c i krawędzie do niej równoległe na fotografii będą miały długość

$$c'=tv=cv/c_0$$

- Zauważmy, że

$$\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \right)^2 + \left(\frac{v}{c_0} \right)^2 = 1$$

a więc możemy zapisać

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} = \cos \varphi$$

$$\frac{v}{c_0} = \sin \varphi$$

gdzie φ jest pewnym kątem

- Sfotografowany sześcián będzie nadal wyglądał jak sześcián, tylko obrócony o pewien kąt!
- Analogicznie będą wyglądać fotografie innych brył.
- Ciekawostką jest to, że Albert Einstein tuż po stworzeniu STW uważał inaczej, tzn. że fotografia będzie przedstawiała „zdeformowaną bryłę” i dopiero później zmienił zdanie.

Reguła dodawania prędkości

- Rozważmy ruch punktu materialnego względem układów U i U'
- Składowe wektora prędkości wzdłuż osi wynoszą
 - w układzie U :

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

- w układzie U' :

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'}, \quad v_y' = \frac{dy'}{dt'}, \quad v_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

- Z transformacji Lorentza mamy:

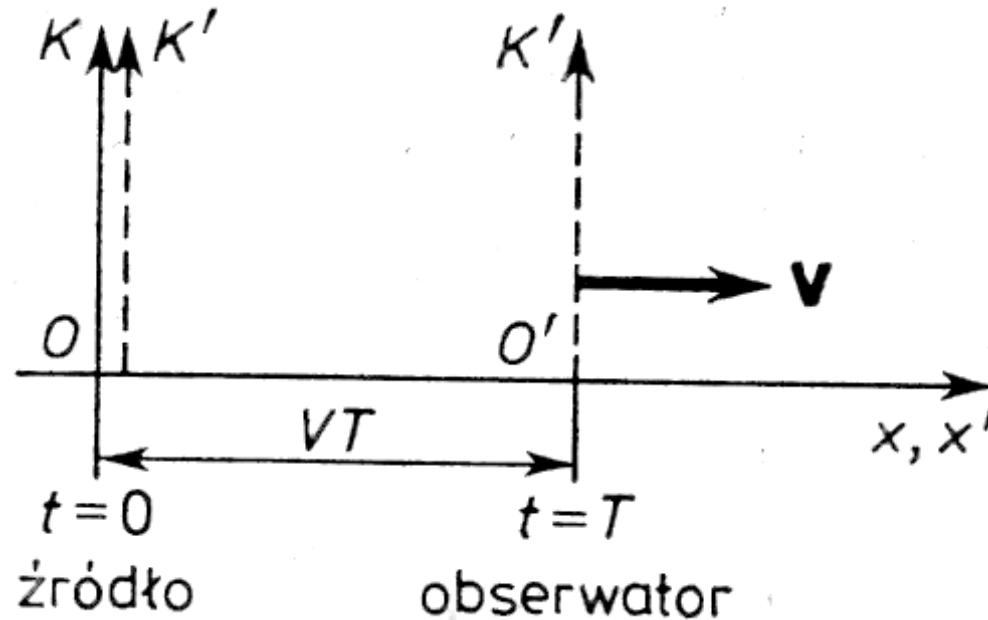
$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Dzieląc stronami trzy pierwsze równania przez czwarte otrzymujemy:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = v'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vv'_y}{c^2}}, \quad v_z = v'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vv'_z}{c^2}}$$

Efekt Dopplera

- Niech względem spoczywającego układu K porusza się wzdłuż osi OX z prędkością V układ K' . Załóżmy, że w początku układu K znajduje się źródło impulsów wysyłających impulsy z okresem T . Załóżmy ponadto, że w chwili, gdy początki układów pokrywały się, źródło wysłało pierwszy impuls.



- Według obserwatora znajdującego się w układzie K i jego zegara, obserwator w układzie K' zarejestruje pierwszy impuls w chwili $t_1=0$, następny zaś w chwili

$$t_2 = t_1 + T + \frac{VT}{(c - V)} = T \left(1 + \frac{V}{c - V} \right) = T \left(1 - \frac{\frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}} \right)$$

- Według obserwatora w układzie K odstęp czasu między dotarciem 1-go i 2-go impulsu do obserwatora w znajdującego się w punkcie O' wynosi

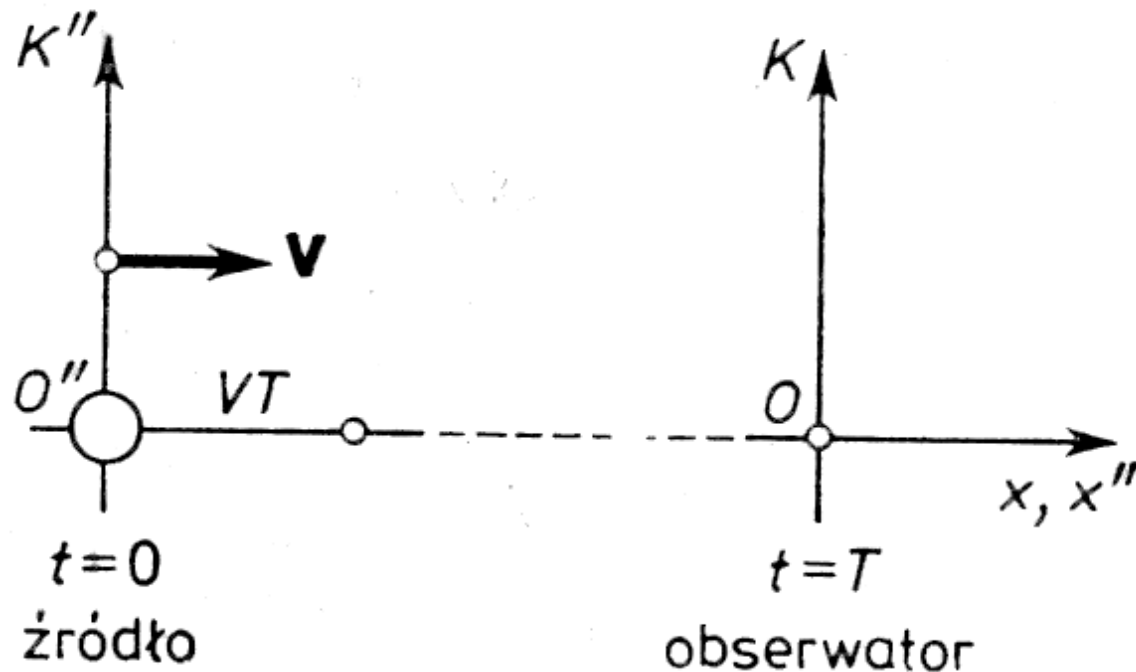
$$\Delta T = t_2 - t_1 = T \left(1 - \frac{\frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}} \right) = T \frac{1}{1 - \frac{V}{c}}$$

- Ze względu na dylatację czasu, odstęp pomiędzy oboma impulsami zaobserwowany przez obserwatora w O' wyniesie

$$T' = T \frac{1}{1 - \frac{V}{c}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = T \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}$$

- Przechodząc do częstotliwości ($f=1/T$, $f'=1/T'$) otrzymujemy

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}$$

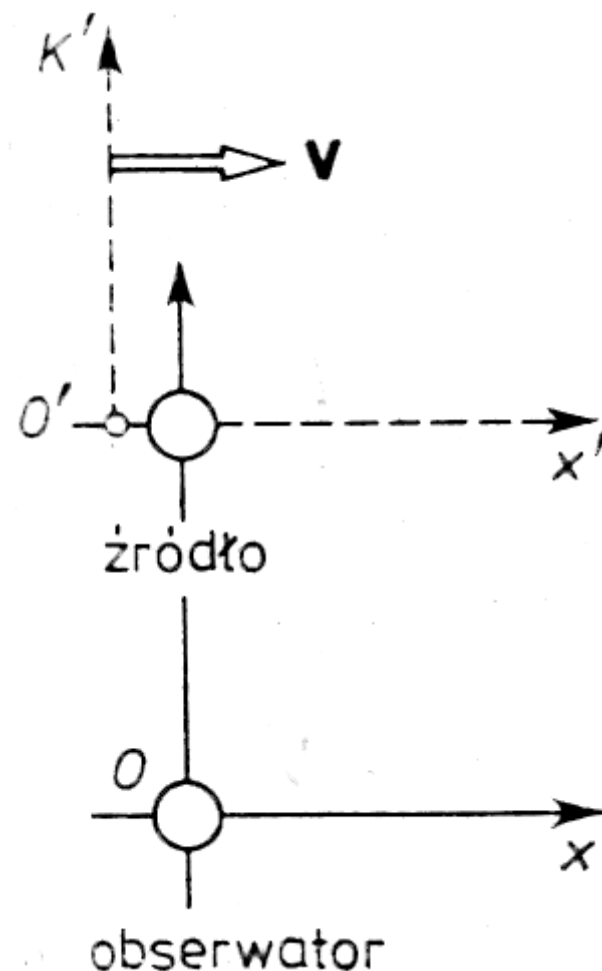


- W przypadku obserwatora zbliżającego się do źródła (rysunek), analogiczne rozważania prowadzą do równania

$$f' = f \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}$$

Poprzeczny efekt Dopplera

- Istnieje przypadek, gdy w ujęciu klasycznym efekt Dopplera nie powinien wystąpić. Dzieje się tak, gdy prędkość ruchu jest prostopadła do kierunku obserwacji (rysunek). W takiej sytuacji odległość między obserwatorem i źródłem chwilowo się nie zmienia. Jednakże ze względu na zjawisko dylatacji czasu występuje efekt Dopplera.



- Częstotliwość emitowana przez źródło i odbierana przez obserwatora są związane równaniem:

$$f' = f \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

- Taki efekt, przewidywany jedynie przez STW został zmierzony doświadczalnie w roku 1938.

Energia i pęd

- Energia cząstki o masie m_0 wynosi

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Pęd cząstki o masie m_0 i prędkości v wynosi

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Zauważmy, że zachodzi:

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4$$

- Często parę

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

nazywa się wektorem czteropędu