

Wykład Elektrotechnika 1

Zagadnienia:

1. Podstawowe pojęcia z zakresu przedmiotu Elektrotechnika (prąd, napięcia, energia itp.)
2. Elementy pasywne i aktywne obwodu elektrycznego i ich charakterystyki.
3. Prawa Kirchoffa oraz metody rozwiązywania obwodów elektrycznych (zasada superpozycji, metoda oczkowa, węzłowa i wyk. tw Thevenina).
4. Moc, bilans mocy oraz dopasowanie odbiornika do źródła w obwodach prądu stałego.
5. Sygnały elektryczne oraz ich klasyfikacja. Parametry charakteryzujące sygnały.
6. Związki pomiędzy prądami i napięciami w elementach R, L, C przy przebiegach harmonicznym.
7. Moce w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego.
8. Kompensacja mocy biernej.



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Literatura:

1. Bolkowski S.: Teoria obwodów elektrycznych. WNT, Warszawa 2018,
2. Osiowski J., Szabatin J.: Podstawy teorii obwodów. Tom I i II, PWN, Warszawa 2016.

Materiały przygotowane w ramach projektu

„PB 5.0 – dostosowanie oferty dydaktycznej Politechniki Białostockiej do potrzeb nowoczesnej gospodarki oraz zielonej i cyfrowej transformacji”

(nr umowy FERS.01.05-IP.08-0327/23-00) w ramach programu Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego 2021-2027 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego Plus.

Publikacja jest udostępniona na licencji Creative Commons - Uznanie autorstwa 4.0 (CC BY 4.0). Pełna treść licencji dostępna na stronie [creativecommons.org](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Podstawowe pojęcia z zakresu Elektrotechniki

Prąd elektryczny zjawisko uporządkowanego ruchu ładunków elektrycznych przez badany przekrój poprzeczny środowiska pod wpływem działania pola elektrycznego:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad [\text{A}] \qquad 1[\text{A}] = \frac{1[\text{C}]}{1[\text{s}]}$$

W przyp. prądu stałego

$$I = \frac{Q}{t} \quad [\text{A}]$$

Rodzaje prądów:

- przewodzenia (przemieszczanie się elektronów swobodnych lub jonów),
- przesunięcia (prąd w dielektrykach)
- unoszenia (konwekcji), ruch ładunków elektrycznych wraz z materią np. strumień elektronów w próżni (lampie wyładowczej)

Napięcie elektryczne - jest wielkością charakteryzującą potencjalne pole elektryczne. Wyraża się stosunkiem pracy potrzebnej do przesunięcia ładunku dodatniego z punktu A do B, do wartości tego ładunku. Napięcie wyraża siłę (zdolność) do wymuszenia lub hamowania przepływu prądu elektrycznego.

$$U_{AB} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{W}{q} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} \text{ [V]} \quad \text{gdzie} \quad \vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad \text{- wektor natężenia pola elektrycznego}$$

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad \text{- różnica potencjałów w punkcie A i B}$$

Moc i energia elektryczna

$$p(t) = u(t)i(t) \text{ [W]} \quad \text{- moc chwilowa} \quad P = UI \text{ [W]} \quad \text{- moc w ukl. prądu stałego}$$

Jeśli:

$$p(t_0) > 0 \quad \text{- moc pobierana jest dodatnia (energia jest dostarczana do odbiornika)}$$

$$p(t_0) < 0 \quad \text{- moc pobierana jest ujemna (energia jest oddawana)}$$

$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$ [J] - energia pobierana/oddawana przez element w przedziale czasu od t_1 do t_2

Dla prądu stałego $W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$

Elementy obwodów elektrycznych

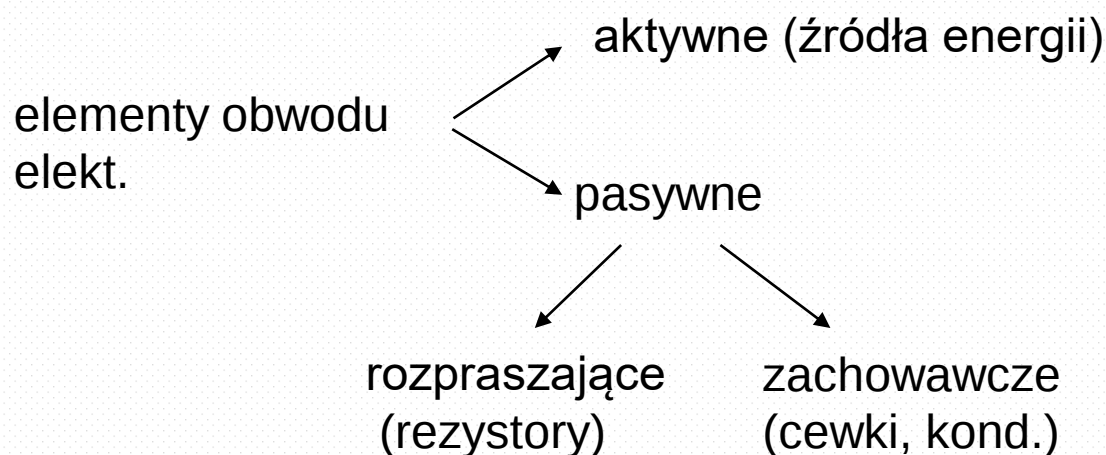
Obwód elektryczny - pewna struktura fizyczna przeznaczona do przewodzenia prądu elektrycznego. Tworzą ją elementy połączone w taki sposób, że istnieje droga zamknięta dla przepływu prądu elektrycznego

W obwodach elektr. wyróżnia się gałęzie, oczka i węzły

- węzeł - zacisk do którego jest przyłączona kolejna gałąź,
- oczko - zbiór połączonych ze sobą elementów tworzących drogę zamkniętą dla przepływu prądu

Rodzaje procesów energetycznych zachodzących w obwodach elektrycznych:

- wytwarzanie energii elektrycznej (przetwarzanie z innego rodzaju energii np. mechanicznej, cieplnej, świetlnej...),
- akumulacja energii (gromadzenie energii w polu elektrycznym lub magnetycznym),
- rozpraszanie energii (zamiana energii elektrycznej na ciepłą).



Podstawowa klasyfikacja elementów obwodów elektr.

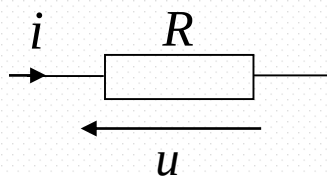
- elementy liniowe (opisane liniowymi równaniami algebraicznymi lub różniczkowymi),
- elementy nieliniowe (opisane nieliniowymi równaniami algebraicznymi lub różniczkowymi),
- elementy stacjonarne - parametry nie zmieniają się w funkcji czasu,
- elementy niestacjonarne - parametry zmieniają się w funkcji czasu,
- elementy skupione - nie są funkcją współrzędnych przestrzennych,
- elementy rozłożone - parametry są funkcją współrzędnych przestrzennych (np. gęstość prądu przy zjawisku naskórkowości).

Elementy obwodu mogą być:

- dwójnikami (mającymi dwa zaciski),
- czwórnikami (mającymi po dwie pary zacisków) lub wielobiegunnikami.

Elementy pasywne obwodu

a) rezystor (opornik) – element rozpraszający energię, zamieniający energię elektryczną na ciepłą



$R[\Omega]$ - rezystancja

$G = \frac{1}{R} [S]$ - konduktancja

$R = \rho \frac{l}{S}$ - rezystancja przewodnika, gdzie

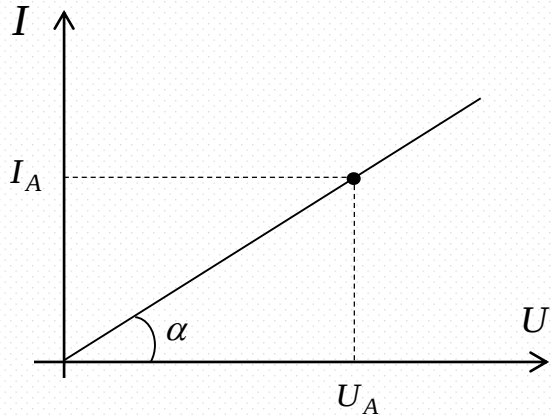
$\rho [\Omega m]$ - rezystywność, l - długość przewodnika, S - przekrój poprzeczny

$R(T) = R(T_0)(1 + \alpha(T - T_0))$ - zależność rezystancji od temperatury, gdzie

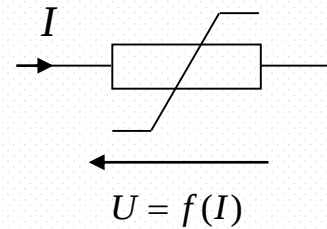
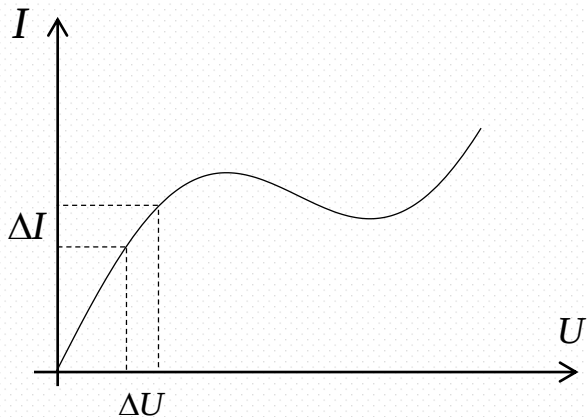
$R(T_0)$ - rezystancja w temperaturze odniesienia T_0

$\alpha \left[\frac{1}{^\circ C} \right]$ - współczynnik temp. rezystancji

Wykład 1



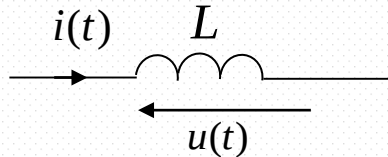
$$R = \frac{U_A}{I_A} = \operatorname{tg} \alpha \quad - \text{ rezystancja statyczna}$$



- rezystancja nieliniowa

$$R_d = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} \quad - \text{ rezystancja dynamiczna}$$

b) cewka - element mający zdolność gromadzenia energii w polu magnetycznym



$L = \frac{\Psi}{I} [\text{H}]$ - indukcyjność własna. Stosunek strumienia skojarzonego z cewką do prądu płynącego przez cewkę.

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(Li_L(t)) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ - związek między płynącym prądem a napięciem na cewce

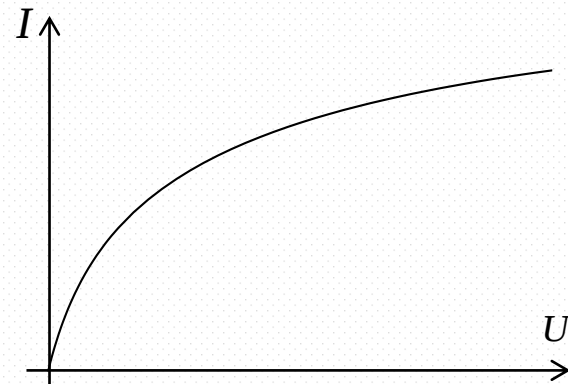
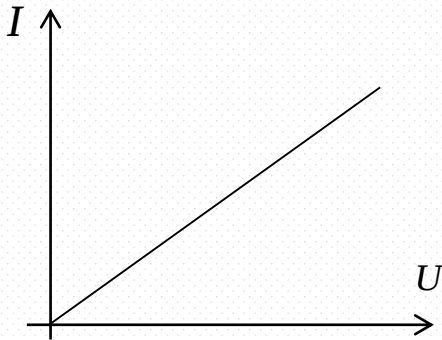
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$



wartość pocz. prądu (od warunku początkowego)

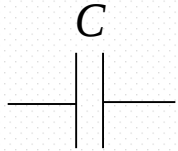
$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) > 0 \quad - \text{ wzór określający energię na cewce}$$

Cewka może być elementem liniowym i nieliniowym



- symbol dławika

c) kondensator - element mający zdolność gromadzenia energii w polu elektrycznym.



$C = \frac{q}{U} [\text{F}]$ - pojemność. Stosunek ładunku zgromadzonego na okładkach kondensatora do napięcia pomiędzy nimi

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \xrightarrow{C = \text{const.}} \quad i_C(t) = \frac{d}{dt}(C \cdot u(t))$$

$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ - związek między płynącym prądem a napięciem na kondensatorze

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

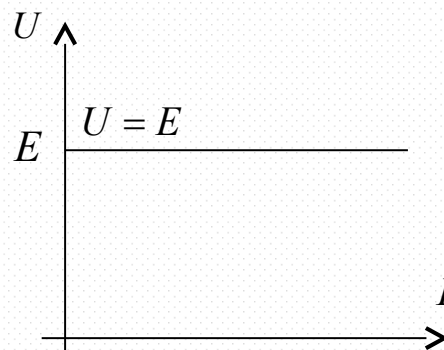
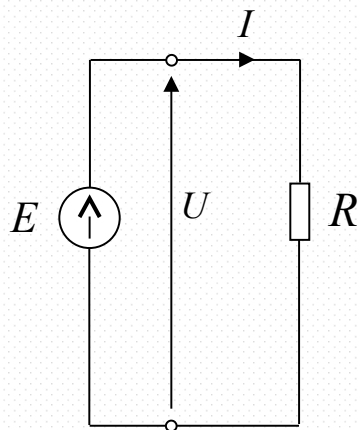
$u(t_0)$ - warunek początkowy

$w_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) > 0$ - wzór określający energię na kondensatorze

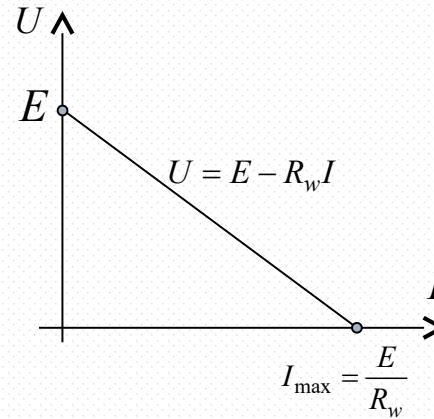
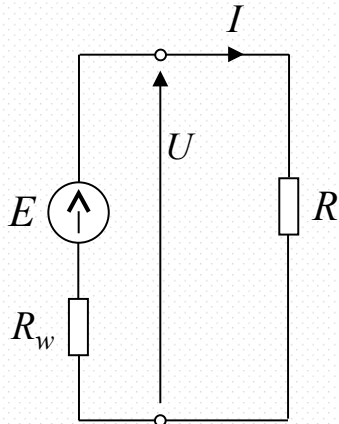
Elementy aktywne obwodu

Źródła napięciowe

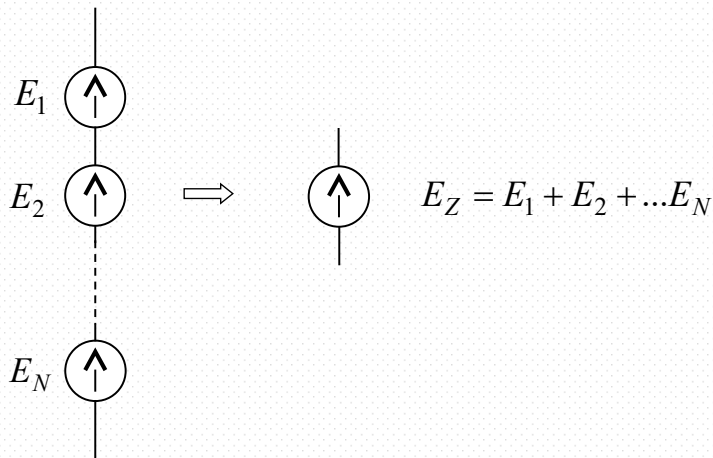
- idealne (bez oporu wewnętrznego). Napięcie na zaciskach nie zależy od przepływającego prądu (obciążenia)



- rzeczywiste (z oporem wewnętrznym R_w)

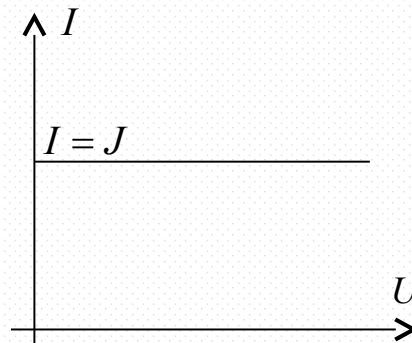
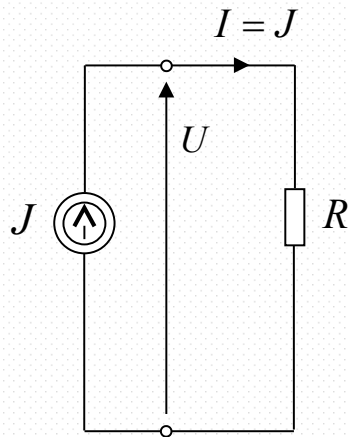


- łączenie źródeł (zasada dotyczy idealnych i rzeczywistych)

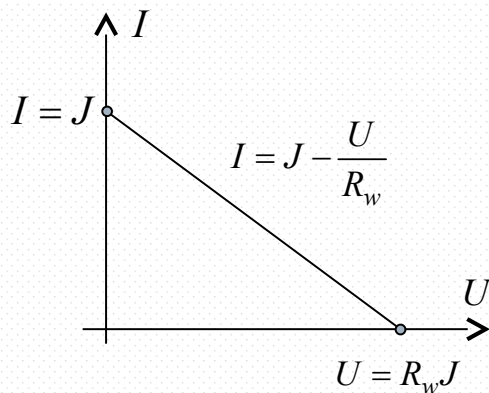
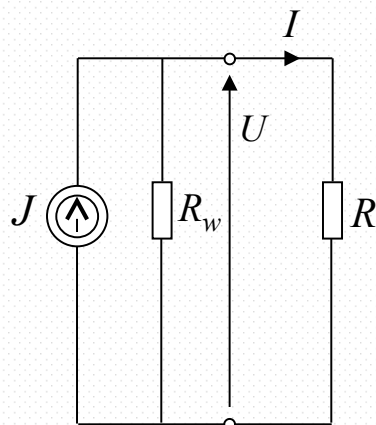


Źródła prądowe

- idealne (z oporem wewnętrznym równym nieskończoności). Prąd źródła nie zależy napięcia na jego zaciskach

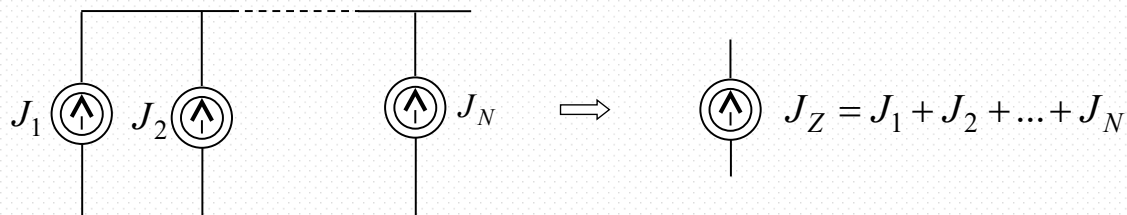


- źródło prądu rzeczywiste (z oporem wewnętrznym R_w)



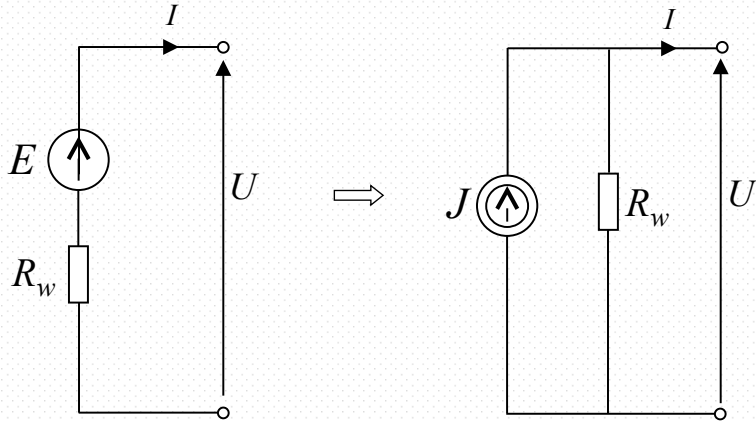
gdy $R_w \rightarrow \infty \Rightarrow I = J$

- łączenie źródeł (zasada dotyczy idealnych i rzeczywistych)

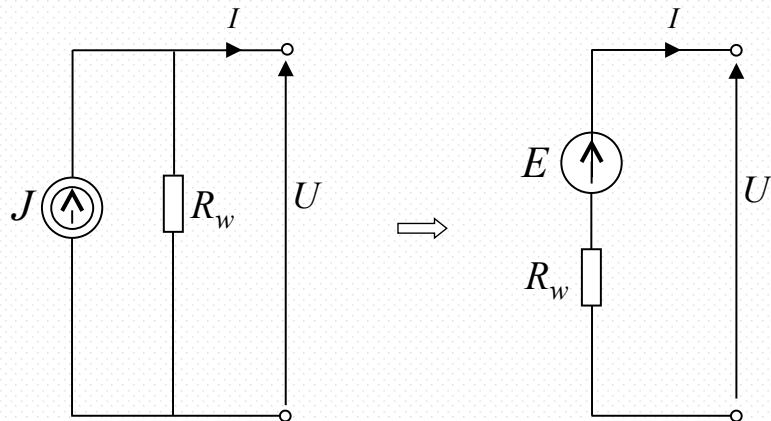


Równoważność źródeł

zamiana źródła rzeczywistego napięciowego na prądowe

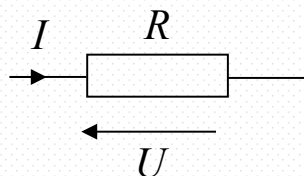


$$J = \frac{E}{R_w}$$



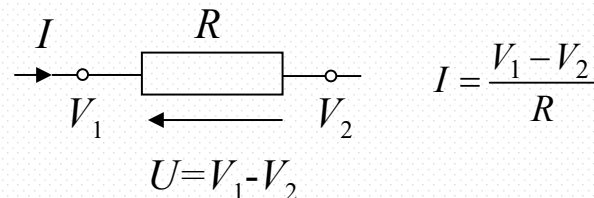
$$E = R_w J$$

Prawo Ohma, I i II prawo Kirchhoffa w obwodach prądu stałego



$$I = \frac{U}{R}$$

$$U = R \cdot I$$



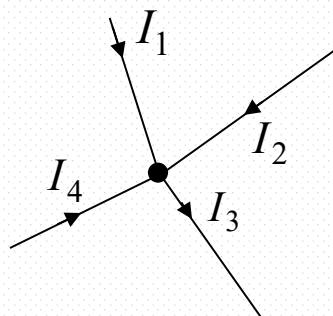
$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

$$U = V_1 - V_2$$

(różnica potencjałów)

Wartość napięcia na zaciskach dwójnika jest równa iloczynowi jego rezystancji i wartości prądu płynącego przez ten dwójnik $U = R \cdot I$

I prawo Kirchhoffa

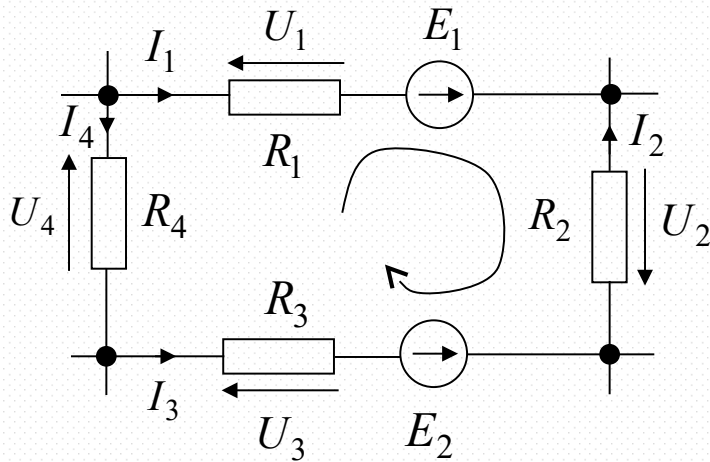


$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3$$

$$\sum_k I_k = 0$$

Suma prądów wpływających i wypływających z danego węzła jest równa zero.
(wynika z zasady zachowania ładunku)

II prawo Kirchhoffa

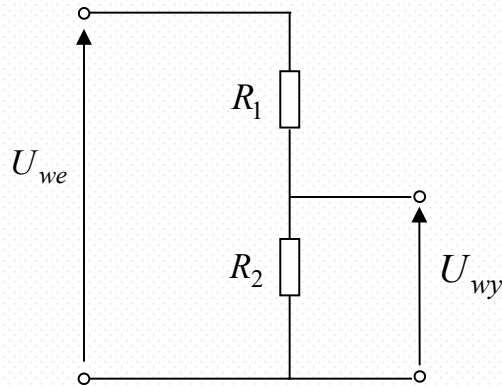


$$-U_1 + E_1 + U_2 - E_2 + U_3 + U_4 = 0$$

Suma wartości napięć występujących na wszystkich elementach oczka obwodu jest równa zero

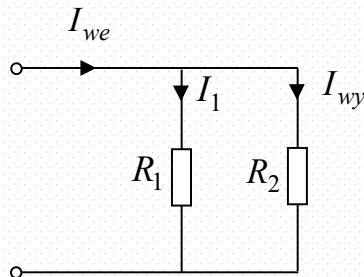
$$\sum_k U_k = 0$$

Dzielnik napięcia - czwórnik, który zapewnia uzyskanie określonego stosunku pomiędzy napięciem wejściowym a wyjściowym



$$U_{wy} = U_{we} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

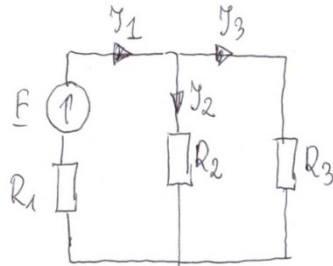
Dzielnik prądu - czwórnik, który zapewnia uzyskanie określonego stosunku pomiędzy prądem wejściowym a wyjściowym



$$I_{wy} = I_{we} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

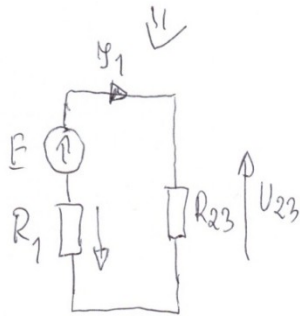
Zadanie 1

Wykorzystując prawa Kirchhoffa obliczyć prądy gałęziowe w podanym obwodzie



Dane: $E = 10 \text{ V}$

$R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$



$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{20} = 5 \Omega$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{23}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0.67 \text{ A}$$

$$U_{23} = R_{23} \cdot I_1 = 5 \cdot \frac{2}{3} = 3.34 \text{ V}$$

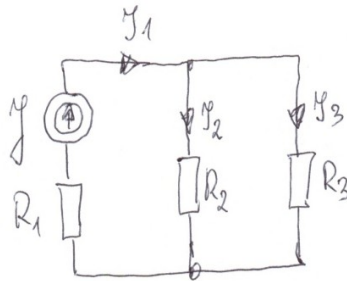
$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = 0.33 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = 0.33 \text{ A}$$

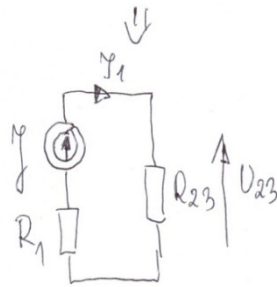
Wykład 2

Zadanie 2

Wykorzystując prawa Kirchhoffa obliczyć prądy gałęziowe w podanym obwodzie

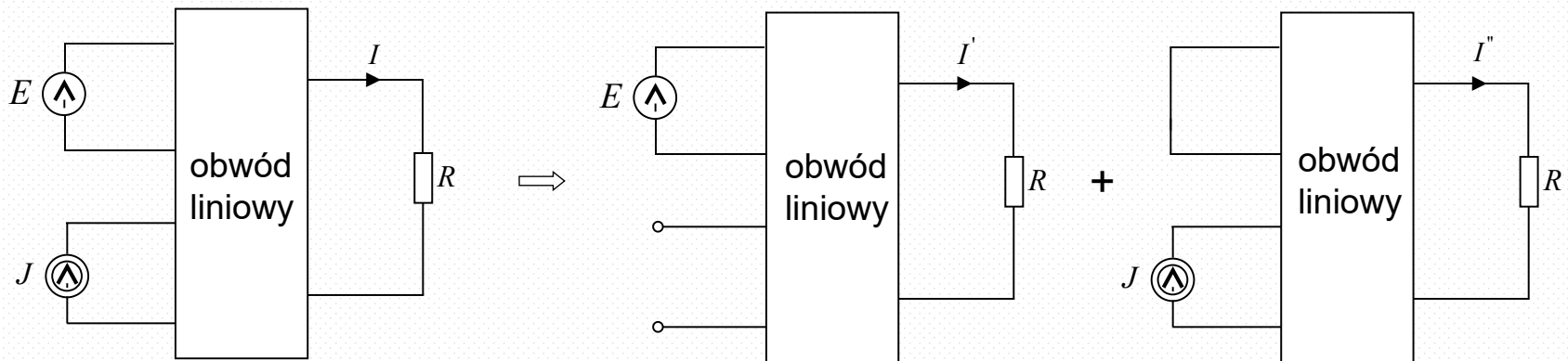


Dane: $I = 1 \text{ A}$
 $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$



$$I_1 = I = 1 \text{ A}$$
$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 5 \Omega \quad U_{23} = I \cdot R_{23} = 5 \text{ V}$$
$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = 0.5 \text{ A}$$
$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = 0.5 \text{ A}$$

Zasada superpozycji - odpowiedź obwodu na jednoczesne działanie wielu wymuszeń (źródeł napięciowych i prądowych) równa jest sumie odpowiedzi od każdego wymuszenia z osobna



$$I = I' + I''$$

wyłączenie źródła napięcia – zwarcie,

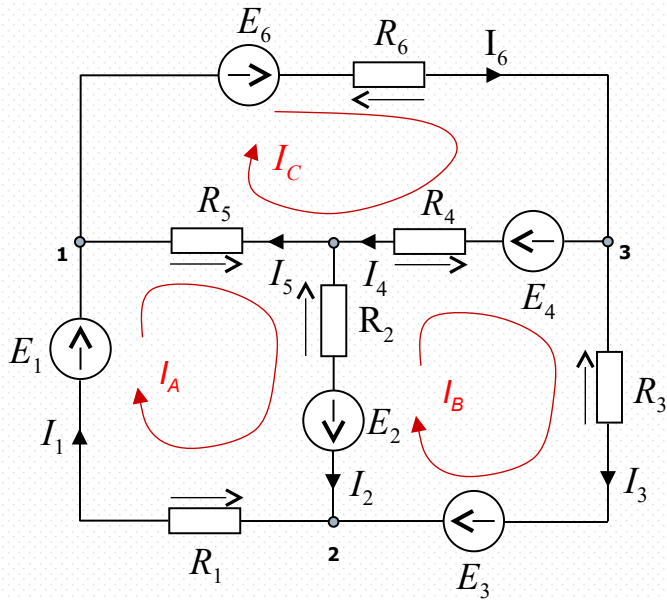
wyłączenie źródła prądowego - rozwarcie

Metoda prądów oczkowych

Założenie:

Znane są: $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ oraz E_1, E_2, E_3, E_4, E_6

Należy wyznaczyć: $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$



Z I prawa Kirchhoffa

$$I_1 + I_5 = I_6 \implies I_5 = I_6 - I_1$$

$$I_2 + I_3 = I_1 \implies I_2 = I_1 - I_3$$

$$I_6 = I_4 + I_3 \implies I_4 = I_6 - I_3$$

można ułożyć $(w-1)$ równań niezależnych
(w – ilość węzłów)

Z II prawa Kirchhoffa

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_5 I_5 = E_1 + E_2 \\ R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_2 I_2 = -E_4 - E_2 + E_3 \\ R_4 I_4 + R_6 I_6 + R_5 I_5 = E_4 + E_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_3) - R_5 (I_6 - I_1) = E_1 + E_2 \\ R_3 I_3 - R_4 (I_6 - I_3) - R_2 (I_1 - I_3) = -E_4 - E_2 + E_3 \\ R_4 (I_6 - I_3) + R_6 I_6 + R_5 (I_6 - I_1) = E_4 + E_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 (R_1 + R_2 + R_5) - I_3 R_2 - I_6 R_5 = E_1 + E_2 \\ -I_1 R_2 + I_3 (R_2 + R_3 + R_4) - I_6 (R_4) = -E_4 - E_2 + E_3 \\ -I_1 R_5 - I_3 R_4 + I_6 (R_4 + R_5 + R_6) = E_4 + E_6 \end{cases}$$

Układ można sprowadzić do postaci

$$\begin{cases} I_A R_{11} + I_B R_{12} + I_C R_{13} = E_{11} \\ I_A R_{21} + I_B R_{22} + I_C R_{23} = E_{22} \\ I_A R_{31} + I_B R_{32} + I_C R_{33} = E_{33} \end{cases}$$

oznaczenia:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5 \qquad R_{12} = -R_2 \qquad R_{13} = -R_5$$

$$R_{21} = -R_2 \qquad R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 \qquad R_{23} = -R_4$$

$$R_{31} = -R_5 \qquad R_{32} = -R_4 \qquad R_{33} = R_4 + R_5 + R_6$$

$$E_{11} = E_1 + E_2 \qquad E_{22} = -E_4 - E_2 + E_3 \qquad E_{33} = E_4 + E_6$$

$$I_A = I_1 \qquad I_B = I_3 \qquad I_C = I_6$$

I_A, I_B, I_C - prądy oczkowe (umyślone prądy płynące we wszystkich gałęziach obwodu)

Rezystancje o jednakowych wskaźnikach R_{kk} nazywa się rezystancjami własnymi oczka. Rezystancja własna k-tego oczka równa jest sumie rezystancji wszystkich gałęzi należących do tego oczka. Przyjmuje się ją zawsze ze znakiem plus.

Rezystancje o różnych wskaźnikach (typu R_{kl}) nazywa się rezystancjami wzajemnymi oczek. Rezystancja wzajemna oczka k-tego z oczkiem l-tym jest równa rezystancji gałęzi wspólnej oczka k-tego i l-tego.

Znak rezystancji wzajemnej może być dodatki lub ujemny (zależy od zwrotu prądów oczkowych we wspólnej gałęzi). Jeżeli zwroty prądów oczkowych w gałęzi wspólnej są jednakowe rezystancji wzajemnej przyporządkowujemy znak plus, w przeciwnym przypadku – znak minus.

Napięcia E_{kk} nazywa się napięciami źródłowymi oczkowymi. Napięcie źródłowe k-tego oczka jest równe sumie napięć źródłowych gałęzi należących do tego oczka. Jeżeli zwrot prądu oczkowego jest zgodny ze zwrotem napięć źródłowych to przyjmujemy je ze znakiem plus, w przeciwnym przypadku z minusem.

$$I_1 = I_A \qquad I_2 = I_A - I_B \qquad I_3 = I_B$$

$$I_4 = I_C - I_B \qquad I_5 = I_C - I_A \qquad I_6 = I_C$$

Zapis macierzowy

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ \dots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \dots \\ E_{NN} \end{bmatrix} \quad [R] \cdot [I] = [E] \quad \Rightarrow \quad [I] = [R]^{-1} [E]$$

 macierz rezystancji
  wektor prądów oczkowych
  wektor źródeł napięciowych

Metoda Cramera (wyznaczników)

$$\Delta = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} E_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ E_{22} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{NN} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix}$$

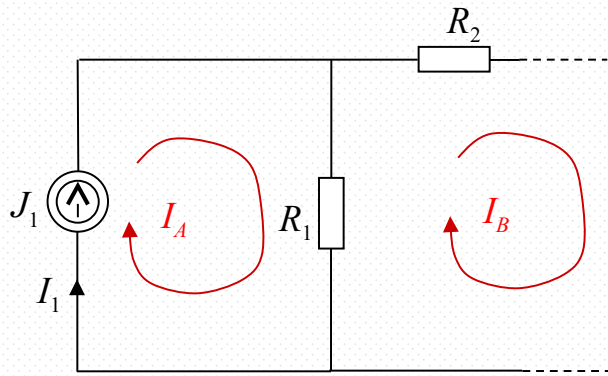
$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} R_{11} & E_{11} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & E_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & E_{NN} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix}$$

$$I_A = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$I_B = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

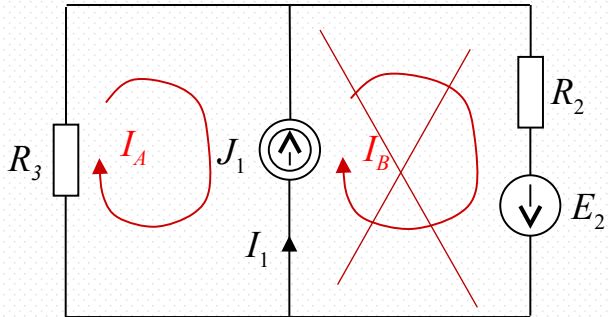
Przypadki szczególne

Obwody zawierające źródła prądowe (w zewnętrznych oczkach)



$$I_A = J_1$$

Obwody zawierające źródła prądowe (w środku obwodu)



$$I_A = -J_1$$

$$I_B = J_1$$

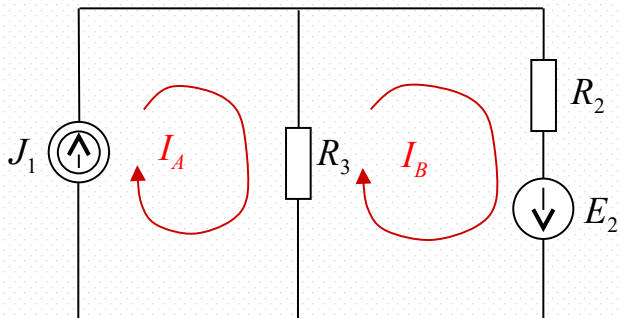
błędne podejście

$$I_1 = I_B - I_A = J_1 + J_1 = \cancel{2J_1}$$

ale $I_1 = J_1$

I sposób

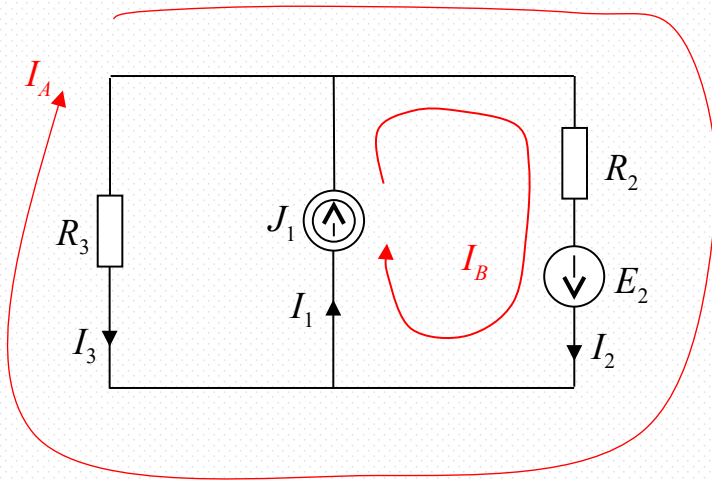
Zamiana gałęzi tak aby przez źródło prądowe płynął jeden prąd oczkowy



$$I_A = J_1$$

II sposób

Ułożenie równań oczkowych w taki sposób by przez źródło prądowe płynął jeden prąd oczkowy



$$\begin{cases} I_B = J_1 \\ I_A(R_2 + R_3) + I_B R_2 = E_2 \end{cases}$$

$$I_1 = I_B$$

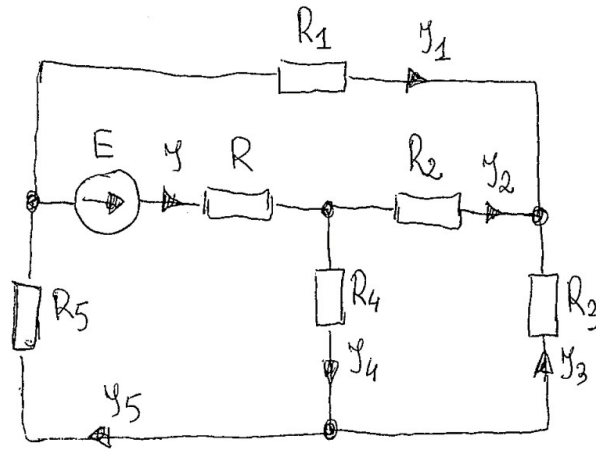
$$I_2 = I_A + I_B$$

$$I_3 = -I_A$$

Wykład 3

Lad.

- podany obwód opisać równaniami wynikającymi z I i II prawa Kirchhoffa.
- obliczyć prądy gałęziowe wykorzystując metodę prądów oczkowych



Dane

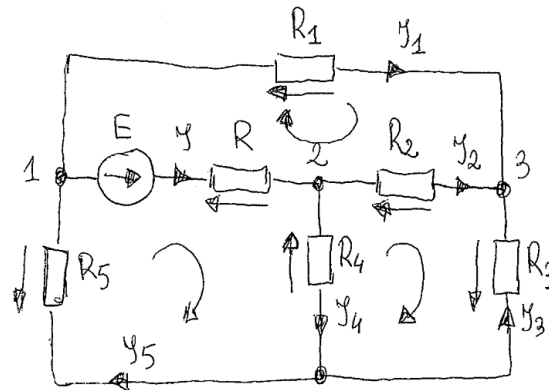
$$E = 20V, R = 5\Omega$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$$

$$R_4 = R_5 = 20\Omega$$

- Z I prawa Kirchhoffa można ułożyć $(w-1)$ niezależnych równań w -ilość węzłów.
Ogólna liczba równań, jakie należy ułożyć dla obwodu o k gałęziach jest równa liczbie gałęzi, czyli suma szukanych prądów.
Z II prawa Kirchhoffa należy ułożyć pozostałe równania, czyli:

$$\begin{array}{cc} k - (w-1) \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{liczba} & \text{ilość} \\ \text{gałęzi} & \text{węzłów} \end{array}$$

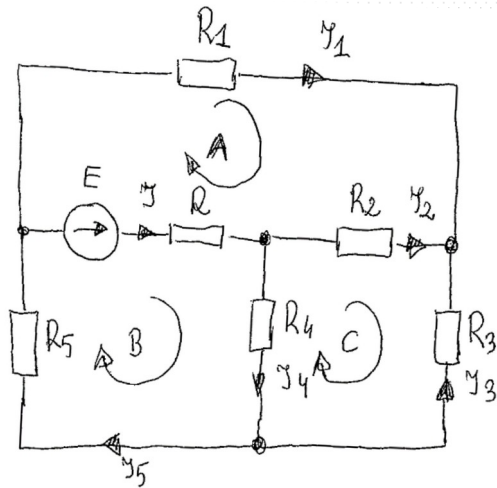


$$\left\{ \begin{array}{l} Y_5 = Y + Y_1 \\ Y = Y_4 + Y_2 \\ Y_2 + Y_1 + Y_3 = 0 \\ E - RY - R_4Y_4 - R_5Y_5 = 0 \\ Y_2R_2 + YR - E - R_1Y_1 = 0 \\ R_4Y_4 - R_2Y_2 + R_3Y_3 = 0 \end{array} \right.$$

Wykład 3

b) metoda oczkowa

wprowadzamy umyślne prądy: I_A, I_B, I_C



$$\begin{cases} I_A \cdot (R_1 + R_2 + R) - I_B R - I_C R_2 = -E \\ -I_A R + I_B (R + R_4 + R_5) - I_C R_4 = E \\ -I_A R_2 - I_B R_4 + I_C (R_2 + R_3 + R_4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_A \cdot 25 - I_B \cdot 5 - I_C \cdot 10 = -20 \\ -I_A \cdot 5 + I_B \cdot 45 - I_C \cdot 20 = 20 \\ -I_A \cdot 10 - I_B \cdot 20 + I_C \cdot 40 = 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 25 & -5 & -10 \\ -5 & 45 & -20 \\ -10 & -20 & 40 \end{vmatrix} = 24500$$

$$W_A = \begin{vmatrix} -20 & -5 & -10 \\ 20 & 45 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{vmatrix} = -20000$$

$$W_B = \begin{vmatrix} 25 & -20 & -10 \\ -5 & 20 & -20 \\ -10 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 10000$$

$$W_C = \begin{vmatrix} 25 & -5 & -20 \\ -5 & 45 & 20 \\ -10 & -20 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Wykład 3

$$y_A = \frac{W_A}{W} = -\frac{8}{11} = -0.73 \text{ A}, \quad y_B = \frac{W_B}{W} = \frac{4}{11} = 0.36 \text{ A}, \quad y_C = \frac{W_C}{W} = 0$$

$$y_1 = y_A = -0.73 \text{ A}$$

$$y = y_B - y_A = 0.36 + 0.73 = 1.09 \text{ A}$$

$$y_2 = y_C - y_A = 0.73 \text{ A}$$

$$y_3 = -y_C = 0$$

$$y_4 = y_B - y_C = 0.36 \text{ A}$$

$$y_5 = y_B = 0.36 \text{ A}$$

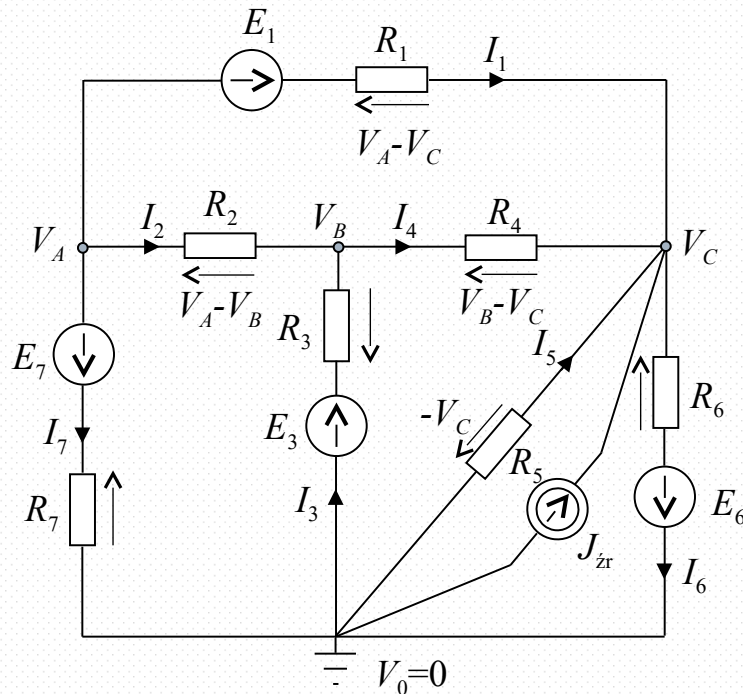
Metoda potencjałów węzłowych

Założenie:

Znane są: $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$ oraz $E_1, E_3, E_6, E_7, J_{\text{źr}}$

Należy wyznaczyć: $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$

Jednemu z niezależnych węzłów obwodu nadaje się wartość równą 0 (uziemia się jego)



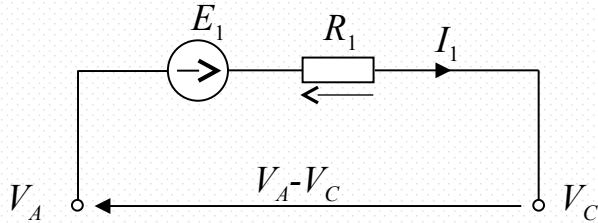
Z I prawa Kirchoffa

$$I_1 + I_2 + I_7 = 0$$

$$I_2 + I_3 = I_4$$

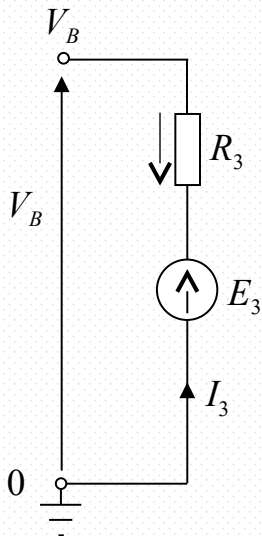
$$I_1 + I_4 + I_5 + J_{\text{źr}} = I_6$$

Dogodniej jest podstawić: $G = \frac{1}{R}$ - konduktancja



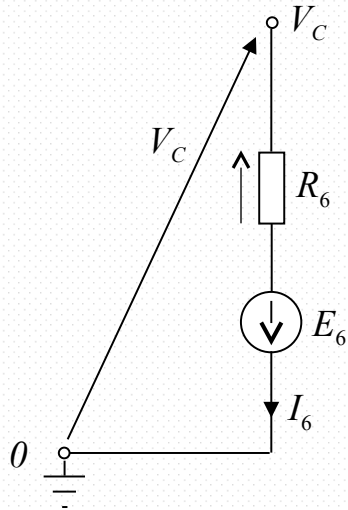
z II prawa Kirchoffa i prawa Ohma:

$$(V_A - V_C) + E_1 - I_1 R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{1}{R_1} (V_A - V_C + E_1) = G_1 (V_A - V_C + E_1)$$

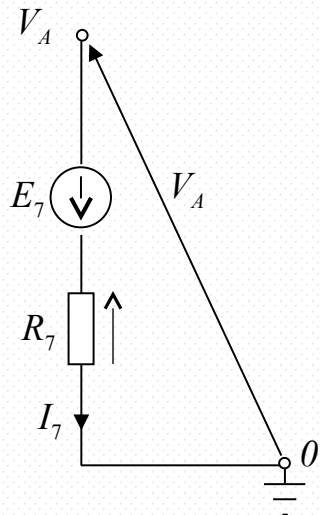


$$V_B + I_3 R_3 - E_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = G_3 (E_3 - V_B)$$

Wykład 4



$$V_C - I_6 R_6 + E_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_6 = G_6 (V_C + E_6)$$



$$V_A + E_7 - I_7 R_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_7 = G_7 (V_A + E_7)$$

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2} = G_2(V_A - V_B)$$

$$I_4 = \frac{V_B - V_C}{R_4} = G_4(V_B - V_C)$$

$$I_5 = -\frac{V_C}{R_5} = -G_5 V_C$$

Po podstawieniu $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$ do równań wynikających z I prawa Kirchhoffa (wcześniej zamieszczonych)

$$\begin{cases} G_1(V_A - V_C + E_1) + G_2(V_A - V_B) + G_7(V_A + E_7) = 0 \\ G_2(V_A - V_B) + G_3(E_3 - V_B) = G_4(V_B - V_C) \\ G_1(V_A - V_C + E_1) + G_4(V_B - V_C) - G_5 V_C + J_{\dot{z}r} = G_6(V_C + E_6) \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} V_A(G_1 + G_2 + G_7) - V_B G_2 - V_C G_1 = -E_1 G_1 - E_7 G_7 \\ -V_A G_2 + V_B(G_2 + G_3 + G_4) - V_C G_4 = E_3 G_3 \\ -V_A G_1 - V_B G_4 + V_C(G_1 + G_4 + G_5 + G_6) = E_1 G_1 - E_6 G_6 + J_{\dot{z}r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7}) - V_B \frac{1}{R_2} - V_C \frac{1}{R_1} = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_7}{R_7} \\ -V_A \frac{1}{R_2} + V_B(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}) - V_C \frac{1}{R_4} = \frac{E_3}{R_3} \\ -V_A \frac{1}{R_1} - V_B \frac{1}{R_4} + V_C(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}) = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_6}{R_6} + J_{\dot{z}r} \end{cases}$$

ogólnie

$$\begin{cases} G_{AA}V_A + G_{AB}V_B + G_{AC}V_C = J_{AA} \\ G_{BA}V_A + G_{BB}V_B + G_{BC}V_C = J_{BB} \\ G_{CA}V_A + G_{CB}V_B + G_{CC}V_C = J_{CC} \end{cases}$$

$$G_{AA} = G_1 + G_2 + G_7$$

$$G_{BB} = G_2 + G_3 + G_4$$

$$G_{CC} = G_1 + G_4 + G_5 + G_6$$

$$G_{AB} = G_{BA} = -G_2$$

$$G_{AC} = G_{CA} = -G_1$$

$$G_{BC} = G_{CB} = -G_4$$

$$J_{AA} = -E_1G_1 - E_7G_7$$

$$J_{BB} = E_3G_3$$

$$J_{CC} = E_1G_1 - E_6G_6 + J_{\dot{z}r}$$

V_A, V_B, V_C - potencjały węzłowe

G_{AA}, G_{BB}, G_{CC} - konduktancje o jednakowych wskaźnikach nazywa się konduktancjami własnymi węzła. Konduktancja własna k-tego węzła jest równa sumie konduktancji gałęzi zbiegających się w tym węźle. Niezależnie od zwrotów prądów gałęziowych konduktancje własne przyjmuje się ze znakiem plus.

G_{BA}, G_{CA}, G_{CB} - konduktancje o różnych wskaźnikach nazywa się konduktancjami wzajemnymi. Konduktancja wzajemna węzła k-tego z l-tym jest równa sumie konduktancji wszystkich gałęzi łączących bezpośrednio węzeł k-ty z l-tym. Niezależnie od zwrotu prądów gałęziowych konduktancje wzajemne przyjmuje się ze znakiem minus.

J_{AA}, J_{BB}, J_{CC} – wypadkowe prądy źródłowe. Prąd źródłowy J_{KK} jest równy sumie iloczynów konduktancji gałęzi i napięć źródłowych gałęzi (składników typu $G_K E_K$) należących do l-tego węzła. Jeżeli do rozpatrywanego węzła jest dołączona gałąź zawierająca prąd źródłowy to do podanego iloczynu dodaje się prąd źródłowy. Iloczynowi przyporządkowuje się znak plus jeżeli zwrot E_K jest w kierunku rozpatrywanego węzła k i znak minus jeżeli przeciwnie. W taki sam sposób ustala się znak prądu źródłowego J_{KK}

Po wyznaczeniu potencjałów węzłowych prądy gałęziowe oblicza się wykorzystując prawa Kirchhoffa i Ohma (wcześniej pokazano)

$$I_1 = \frac{(V_A - V_C) + E_1}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{E_3 - V_B}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{V_B - V_C}{R_4}$$

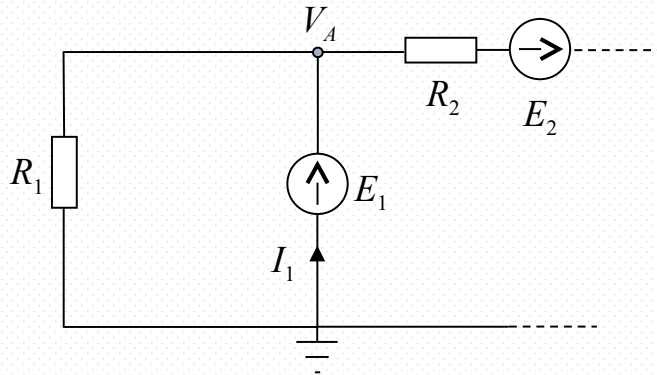
$$I_5 = -\frac{V_C}{R_5}$$

$$I_6 = \frac{V_C + E_6}{R_6}$$

$$I_7 = \frac{V_A + E_7}{R_7}$$

Przypadki szczególne

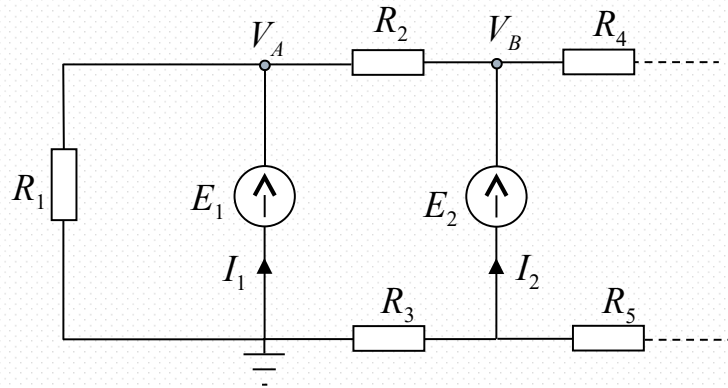
Obwód zawierający idealne źródło napięcia



$$V_A = E_1$$

Uziemienie węzła w gałęzi gdzie znajduje się idealne źródło napięcia

Obwód zawierający więcej niż jedno idealne źródło napięcia

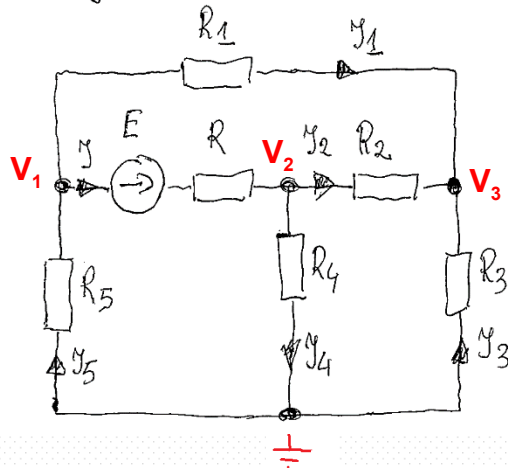


Wykorzystuje się tw. o włączaniu dodatkowych idealnych źródeł napięcia

Wykład 4

Zadanie

W podanym obwodzie obliczyć prądy gałęziowe wykorzystując metodę potencjałów węzłowych



Dane:

$$E = 20V, R = 5\Omega$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$$

$$R_4 = R_5 = 20\Omega$$

$$\begin{cases} V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_5} \right) - V_2 \left(\frac{1}{R} \right) - V_3 \left(\frac{1}{R_1} \right) = -\frac{E}{R} \\ V_2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} \right) - V_1 \left(\frac{1}{R} \right) - V_3 \left(\frac{1}{R_2} \right) = \frac{E}{R} \\ V_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - V_2 \left(\frac{1}{R_2} \right) - V_1 \left(\frac{1}{R_1} \right) = 0 \end{cases}$$

Wykład 4

$$\begin{cases} \frac{4}{20} V_1 - \frac{1}{5} V_2 - \frac{1}{10} V_3 = -4 & | \cdot 20 \\ -\frac{1}{5} V_1 + \frac{4}{20} V_2 - \frac{1}{10} V_3 = 4 & | \cdot 20 \\ -\frac{1}{10} V_1 - \frac{1}{10} V_2 + \frac{3}{10} V_3 = 0 & | \cdot 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4V_1 - 4V_2 - 2V_3 = -80 \\ -4V_1 + 4V_2 - 2V_3 = 80 \\ -2V_1 - 2V_2 + 6V_3 = 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 110$$

$$W_{V_1} = \begin{vmatrix} -80 & -4 & -2 \\ 80 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -800$$

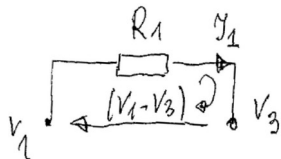
$$W_{V_2} = \begin{vmatrix} 4 & -80 & -2 \\ -4 & 80 & -2 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 800$$

$$W_{V_3} = \begin{vmatrix} 4 & -4 & -80 \\ -4 & 4 & 80 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

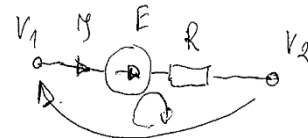
$$V_1 = \frac{W_{V_1}}{W} = -7.27 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{W_{V_2}}{W} = 7.27 \text{ V} \quad V_3 = 0$$

Obliczenie prądów gałęziowych

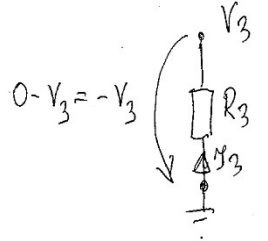


$$\Rightarrow I_1 = \frac{V_1 - V_3}{R_1} = -0.43 \text{ A}$$

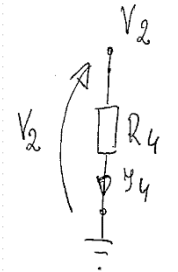


$$\Rightarrow I = \frac{(V_1 - V_2) + E}{R} = 1.09 \text{ A}$$

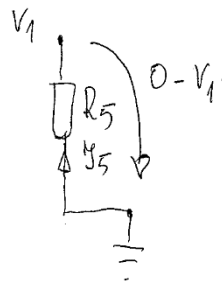
Wykład 4



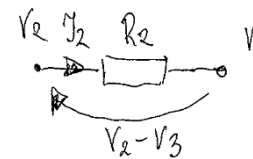
$$0 - V_3 = -V_3 \Rightarrow y_3 = \frac{-V_3}{R_3} = 0 \text{ A}$$



$$y_4 = \frac{V_2}{R_4} = 0.36 \text{ A}$$



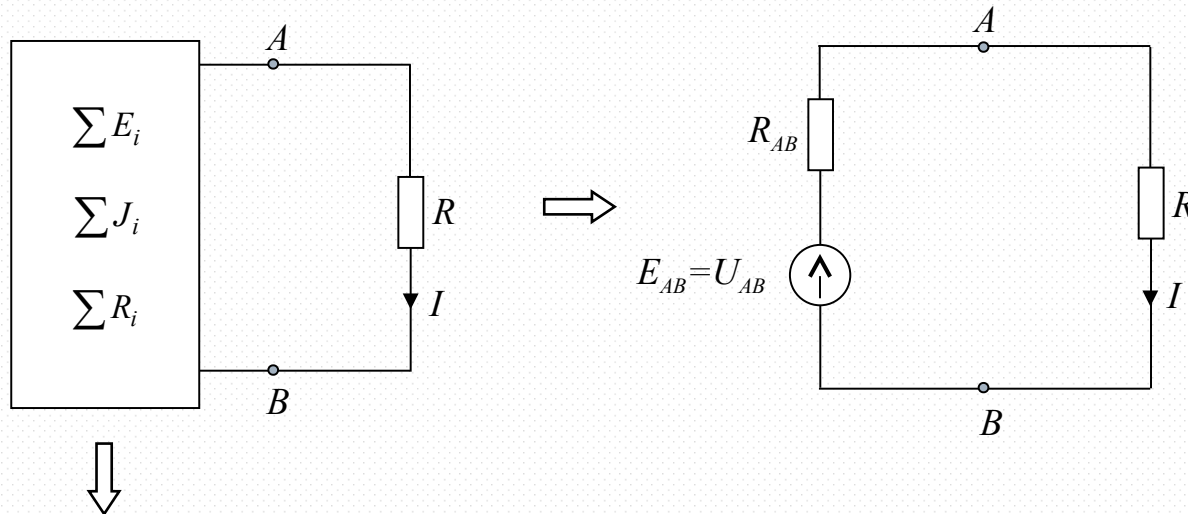
$$0 - V_1 = -V_1 \Rightarrow y_5 = \frac{-V_1}{R_5} = 0.36 \text{ A}$$

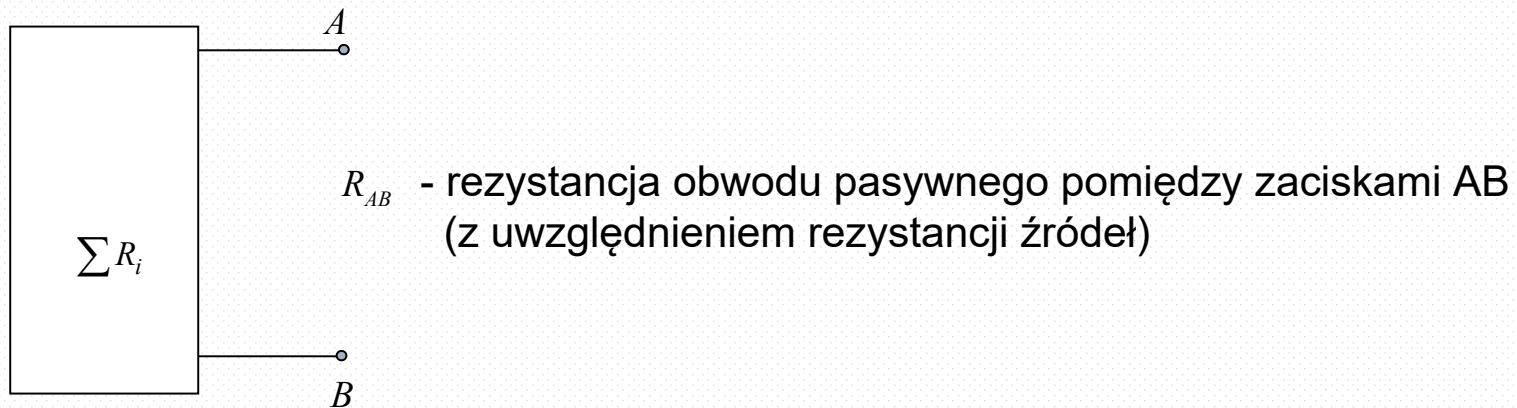
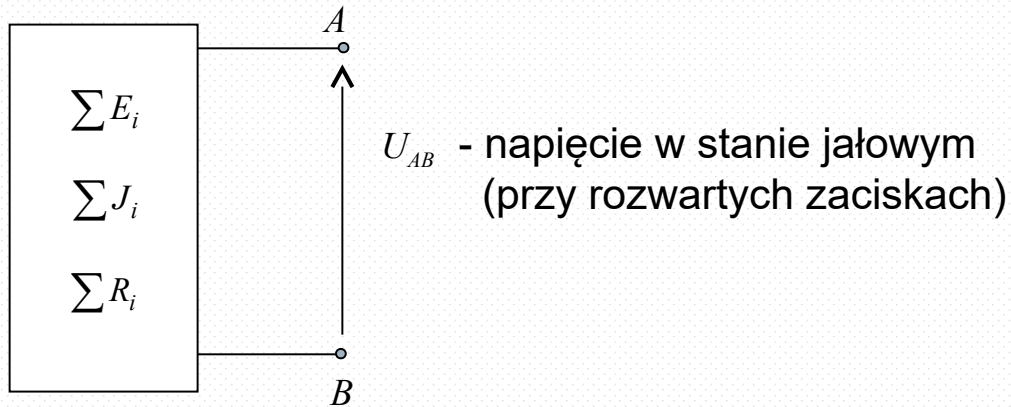


$$y_2 = \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0.43 \text{ A}$$

Twierdzenie Thevenina

Dowolny aktywny obwód liniowy można od strony wybranych zacisków AB zastąpić obwodem równoważnym składającym się z szeregowego połączonego idealnego źródła napięcia równego napięciu pomiędzy zaciskami AB w stanie jałowym oraz jednej rezystancji równej rezystancji zastępczej obwodu pasywnego widzianej od strony zacisków AB



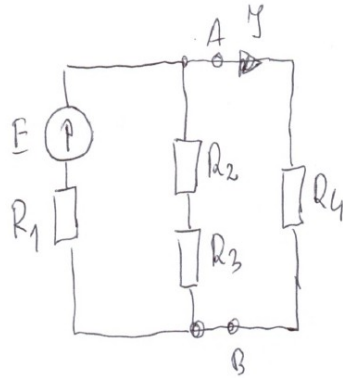


Przy obliczaniu rezystancji zastępczej, źródła napięciowe są zwierane a prądowe rozwierane

Wykład 4

Zadanie

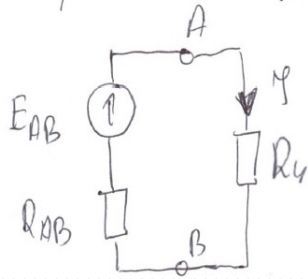
Wykonajstajęc tw. Thevenina obliczyć prąd I (pokazany w poniższym obwodzie)



$$\text{Dane: } E = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$$

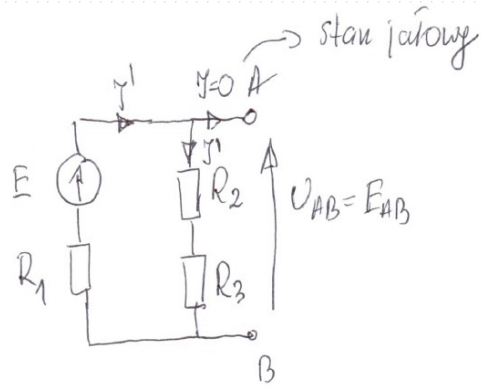
Zgodnie z tw. Thevenina obwód od strony zacisków A i B można przedstawić jako:



$$I = \frac{E_{AB}}{R_{AB} + R_4}$$

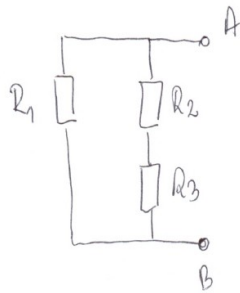
Wykład 4

gdzie



$$E_{AB} = (R_2 + R_3) y' = (R_2 + R_3) \frac{E}{R_2 + R_3 + R_1} =$$

$$= 20 \cdot \frac{10}{30} = \frac{20}{3} \text{ V}$$



$$R_{AB} = \frac{(R_2 + R_3) \cdot R_1}{R_2 + R_3 + R_1} = \frac{20 \cdot 10}{30} = \frac{20}{3} \Omega$$

$$y = \frac{E_{AB}}{R_{AB} + R_4} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{20}{3} + 10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{50} = 0.4 \text{ A}$$

Moc w obwodach prądu stałego

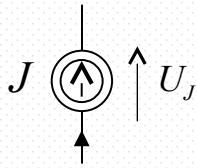
$$P = U \cdot I \quad [\text{W}]$$

Moc źródła napięciowego



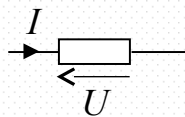
$$P_E = E \cdot I$$

Moc źródła prądowego



$$P_J = U_J \cdot J$$

Moc pobierana przez rezystancję



$$P_R = U \cdot I = R \cdot I^2$$

Bilans mocy

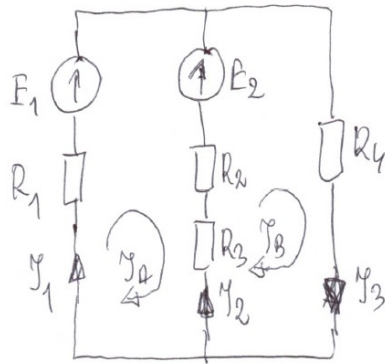
Suma mocy dostarczonej do obwodu przez źródła energii (źr. napięciowe i prądowe) jest równa sumie mocy pobieranych przez wszystkie elementy rezystancyjne

$$\sum P_{\dot{z}r} = \sum P_{odb}$$

Wykład 5

Zadanie

w podanym obwodzie obliczyć prądy gałęziowe oraz sprawdzić bilans mocy



$$\text{Dane: } E_1 = E_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$$

met. prądów oczkowych

$$\begin{cases} I_A(R_1 + R_2 + R_3) - I_B(R_2 + R_3) = E_1 - E_2 \\ -I_A(R_2 + R_3) + I_B(R_2 + R_3 + R_4) = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30 I_A - 20 I_B = 0 \quad | :10 \\ -20 I_A + 30 I_B = 10 \quad | :10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 I_A - 2 I_B = 0 \\ -2 I_A + 3 I_B = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_{I_A} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{I_B} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Wykład 5

$$I_A = \frac{W_{PA}}{W} = \frac{2}{5} = 0.4 \text{ A}, \quad I_B = \frac{W_{PB}}{W} = \frac{3}{5} = 0.6 \text{ A}$$

$$I_1 = I_A = 0.4 \text{ A}, \quad I_2 = I_B - I_A = 0.2 \text{ A}, \quad I_3 = I_B = 0.6 \text{ A}$$

Sprawdzenie bilansu mocy

$$\sum P_{Zr} = \sum P_{odb}$$

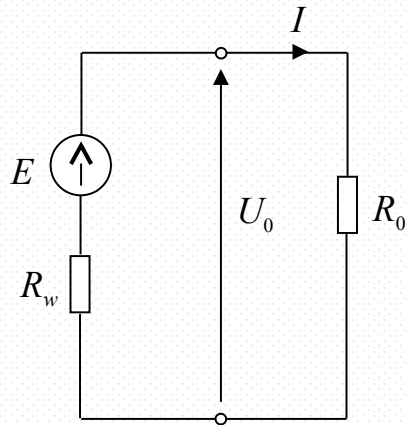
$$\sum P_{Zr} = P_{E1} + P_{E2} = E_1 I_1 + E_2 I_2 = 4 + 2 = 6 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \sum P_{odb} &= P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_2^2 + R_4 I_2^2 = \\ &= 10 \cdot 0.4^2 + 10 \cdot 0.2^2 + 10 \cdot 0.2^2 + 10 \cdot 0.6^2 = \\ &= 1.6 + 0.4 + 0.4 + 3.6 = 6 \text{ W} \end{aligned}$$

Bilans mocy jest spełniony $L = P$

Dopasowanie odbiornika do źródła napięcia stałego

Dopasowaniem odbiornika do źródła napięcia stałego DC nazywamy taki stan obwodu (taki dobór parametrów), w którym moc przekazywana ze źródła do odbiornika jest maksymalna



$$P = U_0 I = R_0 I^2$$

$$I = \frac{E}{R_w + R_0}$$

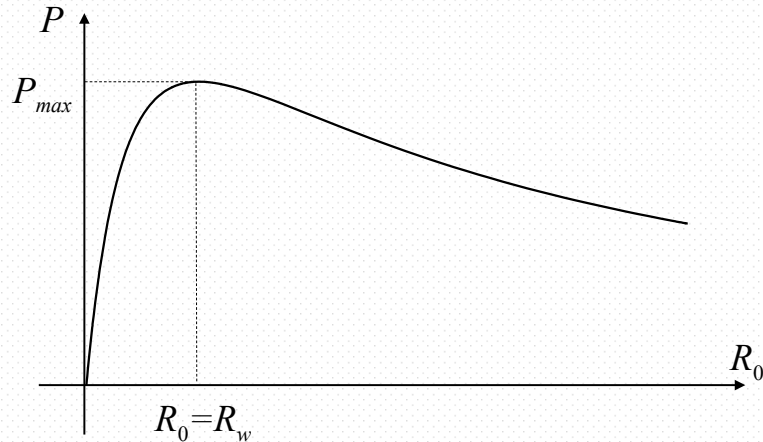
$$P = R_0 \frac{E^2}{(R_w + R_0)^2} = P(R_0)$$

$$\frac{dP}{dR_0} = \frac{E^2[(R_w + R_0)^2 - 2R_0(R_w + R_0)]}{(R_w + R_0)^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad E^2(R_w^2 + 2R_w R_0 + R_0^2 - 2R_0 R_w - 2R_0^2) = 0$$

$$E^2(R_w^2 - R_0^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_0 = R_w \quad - \text{warunek dopasowania}$$

warunek dopasowania $\Rightarrow$ rezystancja odbiornika jest równa
rezystancji wewnętrznej źródła

$$\text{dla } R_0 = R_w \Rightarrow P_{\max} = R_0 \frac{E^2}{(2R_0)^2} = \frac{R_0 E^2}{4R_0^2} = \frac{E^2}{4R_0}$$



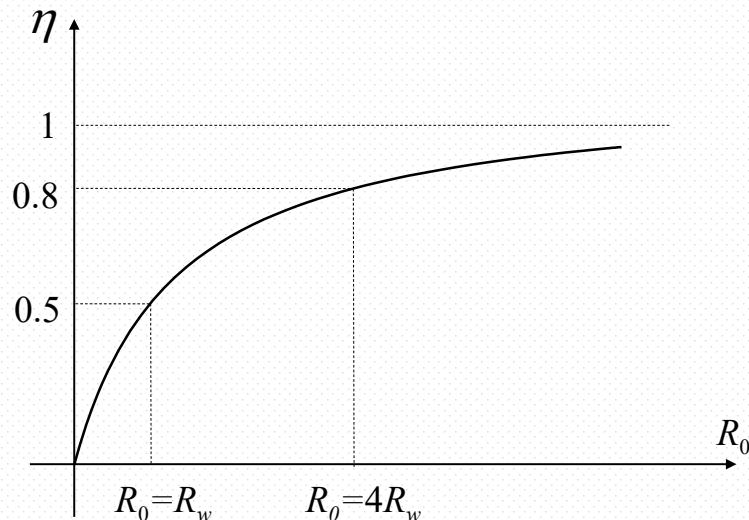
Sprawność źródła – stosunek mocy pobieranej przez odbiornik do mocy oddawanej przez źródło

$$\eta = \frac{P_{odb}}{P_{\dot{z}r}} \quad P_{\dot{z}r} = E \cdot I = \frac{E^2}{(R_0 + R_w)}$$

$$P_{odb} = R_0 \frac{E^2}{(R_w + R_0)^2}$$

$$\eta = R_0 \frac{\cancel{E^2}}{(R_w + R_0)^2} \cdot \frac{(\cancel{R_w} + R_0)}{\cancel{E^2}} \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{R_0}{R_w + R_0}$$



sprawność jest tym większa im większa jest rezystancja odbiornika

Sprawność przy dopasowaniu odbiornika do źródła

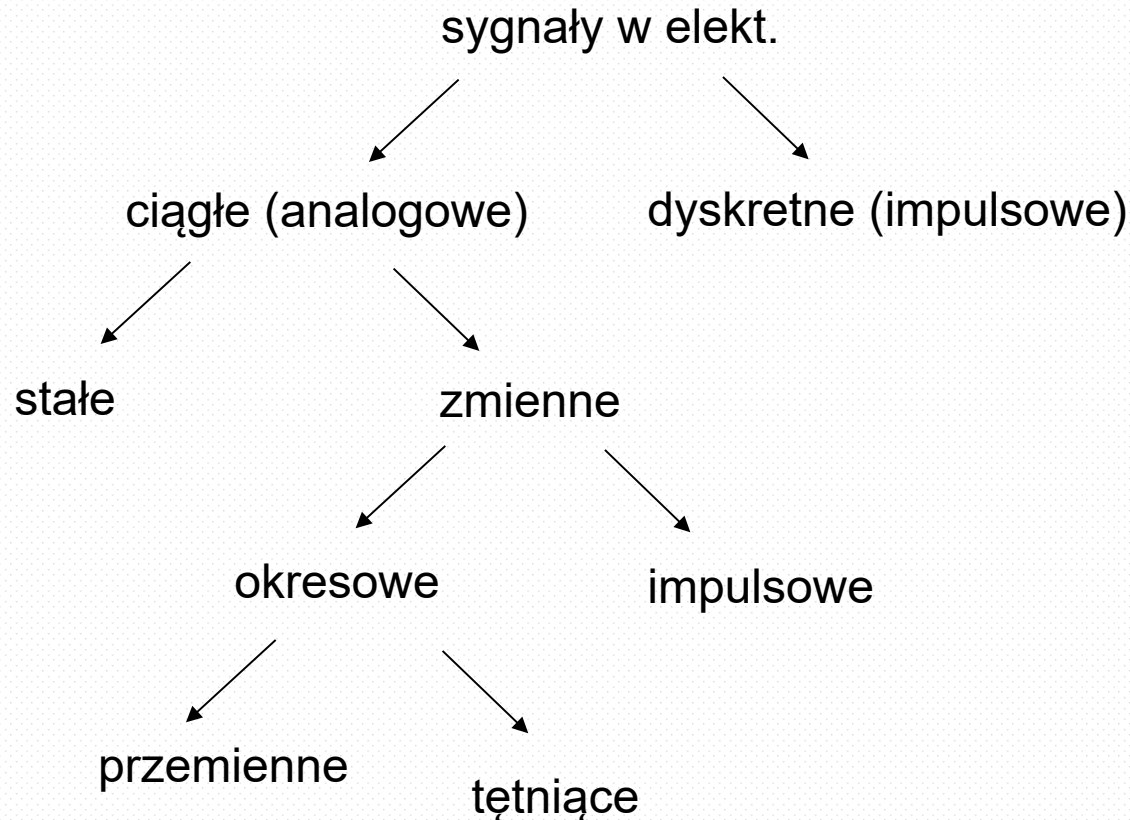
$$\eta = \frac{P_{\max}}{P_{\text{źr}}} = \frac{\cancel{E^2} \cancel{2R_0}}{4\cancel{R_0} \cancel{E^2}} = \frac{1}{2}$$

Maksymalna sprawność źródła w stanie dopasowania wynosi $\frac{1}{2}$

Pozostała część mocy jest tracona na rezystancji wewnętrznej źródła

Sygnały elektryczne i ich klasyfikacja

Sygnał - funkcja opisującą wielkość fizyczną (np. napięcie, prąd, ładunek, strumień magnetyczny)



Sygnałem **zmiennym** nazywam taki sygnał, dla którego w funkcji czasu ulega zmianie jego wartość liczbowa przy niezmiennym zwrocie lub ulega zmianie zwrot przy niezmiennym wartości liczbowej lub ulega zmianie zarówno zwrot jak i wartość liczbowa. Sygnały zmiennie mogą być okresowe i nieokresowe

Sygnały nazywamy **okresowym** lub periodycznym jeżeli powtarza się on w równych odstępach czasu. Taki sygnał spełnia warunek okresowości

$$f(t + T) = f(t)$$

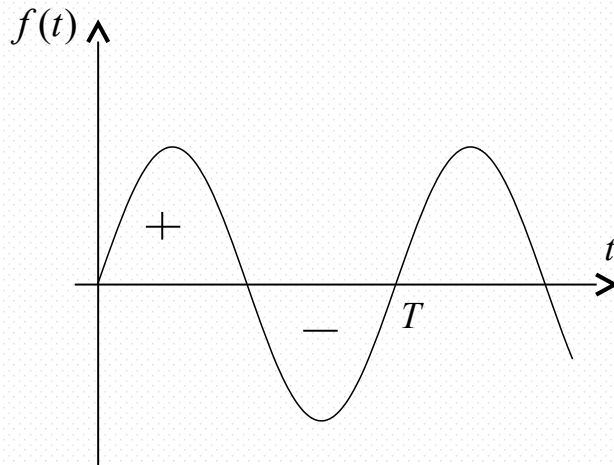
T - okres

Sygnały okresowe nazywamy **przemiennym**, jeżeli pole powierzchni ograniczone przebiegiem sygnału w ciągu jednego okresu T jest równe zero. Takie syg. spełniają warunek

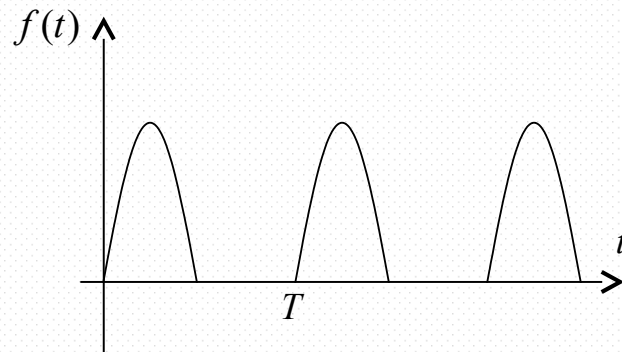
$$\int_0^T f(t) dt = 0$$

Przykłady

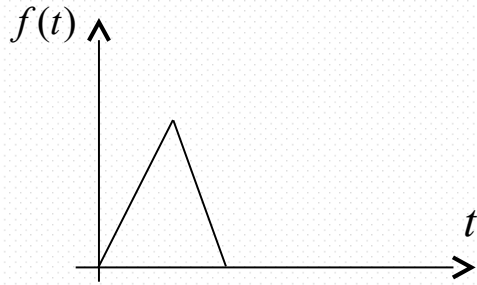
- sygnał przemienny (sinusoida)



- sygnał tętniący (sinusoida wyprostowana jednopółwkowo)



- sygnał impulsowy (jednokrotny)



Parametry charakteryzujące sygnały okresowe

a) wartość chwilowa – wartość jaką sygnał przyjmuje w danej chwili czasu

przykład

$$u(t) = 230\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ)$$

$$u(0) = 230\sqrt{2} \sin(30^\circ) \approx 162.34 \text{ V}$$

b) wartość maksymalna (szczytowa) – największa wartość jaką syg. osiąga w rozpatrywanym przedziale czasu.

przykład

$$U_m = 230\sqrt{2} = 325.27 \text{ V}$$

c) wartość średnia całokresowa – średnia arytmetyczna tego sygnału obliczona dla jednego okresu T

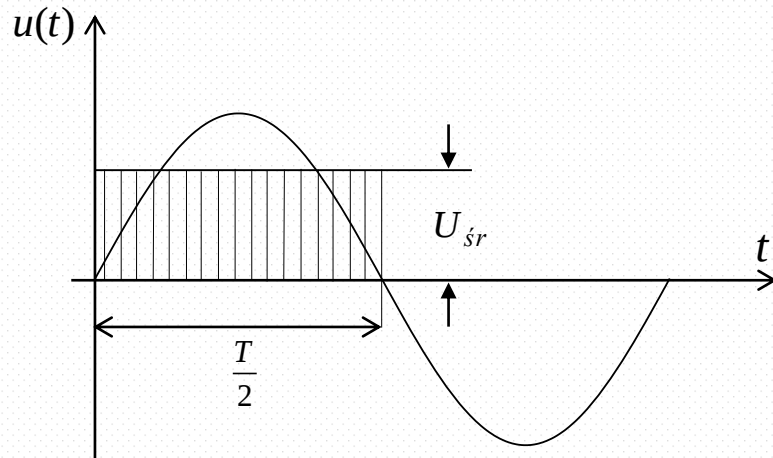
Wykład 6

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

d) wartość średnia półokresowa – średnia arytmetyczna tego sygnału obliczona dla połowy okresu T

$$\overline{F} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$$

przykład



e) wartość skuteczna sygnału okresowego

Wartością skuteczną prądu okresowo zmiennego nazywamy taką wartość prądu stałego, który przepływając przez niezmienną rezystancję R w czasie równym okresowi T , spowoduje wydzielenie na tej rezystancji takiej samej energii (w postaci ciepła) co prąd okresowo zmienny w tym samym czasie

$W_- = U \cdot I \cdot T = R \cdot I^2 T$ - energia prądu stałego

$W_{prz} = R \int_0^T i^2(t) dt$ - energia prądu przemienne w czasie jednego okresu

$$R \cdot I_{sk}^2 T = R \int_0^T i^2(t) dt \quad \Rightarrow \quad I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$U_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Dla przebiegów sinusoidalnych $i(t) = I_m \sin(\omega t)$

$$I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \cos(2\omega t) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \frac{1}{2} T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$



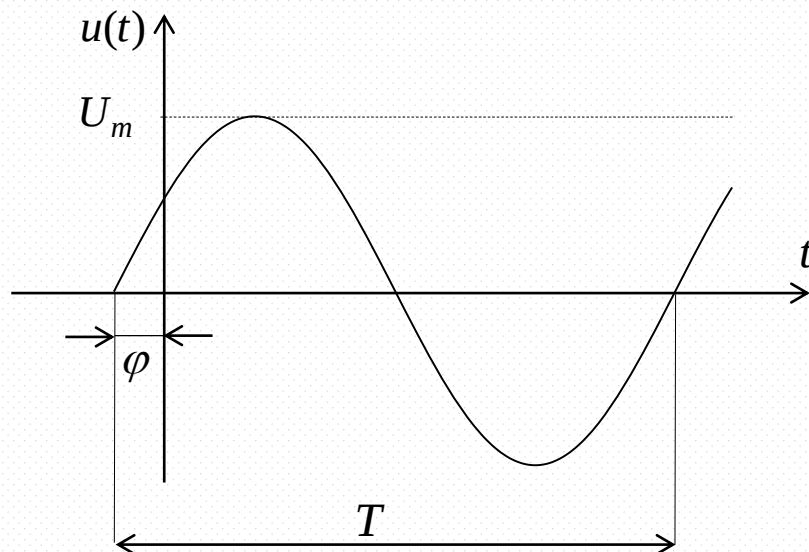
$$I_{sk} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_m = \sqrt{2} I_{sk}$$

Analogicznie względem napięcia: $U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ $U_m = \sqrt{2} U_{sk}$

Sygnał harmoniczny oraz podstawowe jego właściwości

Założenie $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$



$u(t)$ - wartość chwilowa napięcia, U_m - amplituda przebiegu

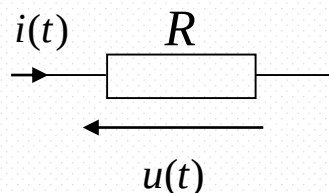
$T = \frac{1}{f}$ - okres przebiegu, f - częstotliwość [Hz], $\omega = 2\pi f$ - pulsacja [rad/s]

φ - faza początkowa, $U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ - wartość skuteczna

$\bar{U} = 0.637 U_m$ - wartość średnia półokresowa, (całokresowa = 0)

Związki pomiędzy napięciami i prądami w elementach R, L, C przy przebiegach harmonicznym

a) rezystor



Założenie $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

$$u(t) = Ri(t)$$

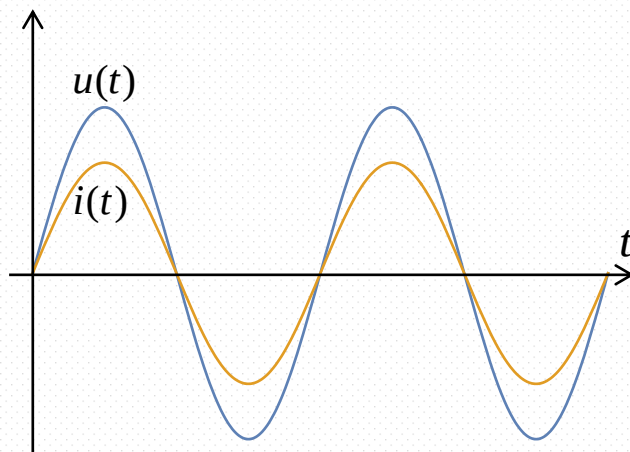
$$u(t) = RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$



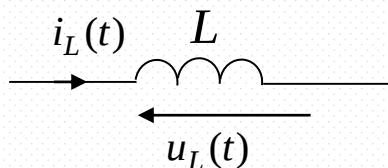
$$U_m = RI_m$$

$$\varphi_i = \varphi_u$$

$$U_{sk} = RI_{sk}$$



b) cewka



Założenie $i_L(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_L(t) = L \frac{d}{dt} (I_m \sin(\omega t + \varphi_i)) = L \omega I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_m \sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ)$$

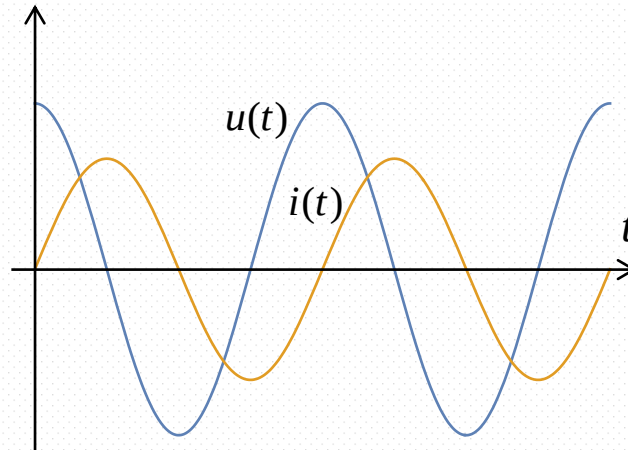
$$u_L(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Z porównania

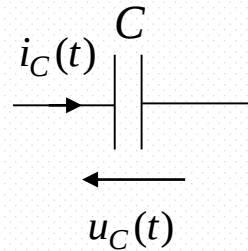
$$U_m = \omega L I_m = X_L I_m \quad \Rightarrow \quad \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = X_L = \omega L \quad \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f \text{ } [\Omega] \quad \text{- reaktancja indukcyjna}$$

$$|Z| = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = \omega L \text{ } [\Omega] \quad \text{- moduł impedancji}$$



c) kondensator



Założenie $u_C(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} (U_m \sin(\omega t + \varphi_u)) = \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \omega C U_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ)$$

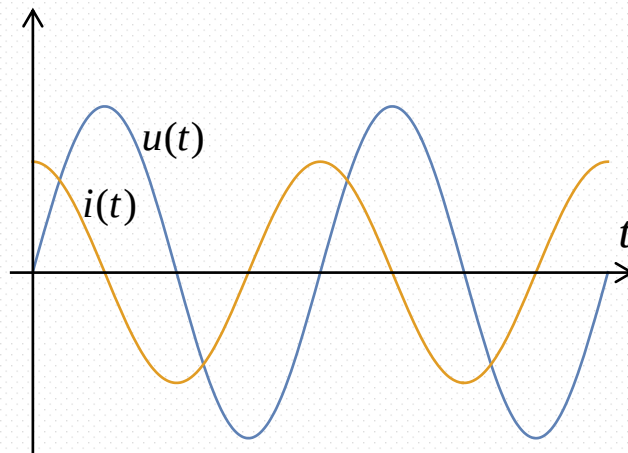
$$i_C(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Z porównania

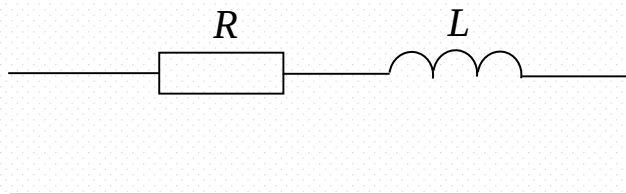
$$I_m = \omega C U_m \quad \longrightarrow \quad \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = \frac{1}{\omega C} = X_c \quad \varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \text{ } [\Omega] \quad - \text{reaktancja pojemnościowa}$$

$$|Z| = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = \frac{1}{\omega C} \text{ } [\Omega] \quad - \text{moduł impedancji}$$



przykładowo, moduł imp. dla szer. obwodu RL

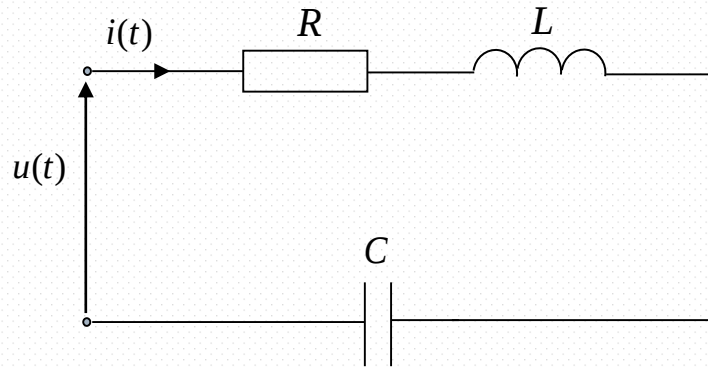


$$|Z| = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad [\Omega]$$

dla szer. obwodu RC

$$|Z| = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad [\Omega]$$

Moc w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego



Założenie:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Moc chwilowa

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Wykład 6

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad / \quad (-1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

Przyjmując: $\alpha = \omega t + \varphi_u$, $\beta = \omega t + \varphi_i$  $\alpha + \beta = 2\omega t + \varphi_u + \varphi_i$, $\alpha - \beta = \varphi_u - \varphi_i$

Wprowadzając oznaczenie $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_u)]$$



składowa
stała



składowa zmienna o
pulsacji 2ω

Duże znaczenie ma moc czynna. Jest to wartość średnia mocy chwilowej za okres

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi \cdot dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_u) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sqrt{2} U_{sk} \sqrt{2} I_{sk}}{2} \cos \varphi \cdot dt$$

$P = U_{sk} I_{sk} \cos \varphi$ [W] - moc czynna. Jest równa iloczynowi wartości skutecznych napięcia i prądu oraz cosinusa kąta przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem a prądem zwanego współczynnikiem mocy ($\cos \varphi$)

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Moc bierna

$$Q = U_{sk} I_{sk} \sin \varphi \text{ [var]}$$

Moc bierna pobierana jest przez elementy reaktancyjne. Znak mocy biernej może być dodatni lub ujemny

Dla odbiorników: $RL \rightarrow Q > 0$, $RC \rightarrow Q < 0$

Moc pozorna

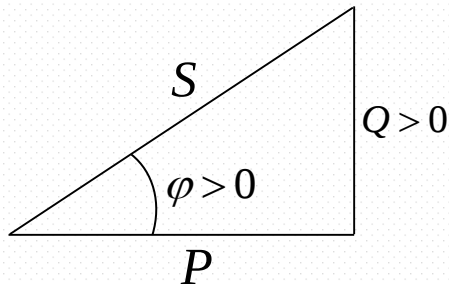
$$S = U_{sk} I_{sk} \text{ [VA]}$$

Moc pozorna jest równa największej wartości mocy czynnej

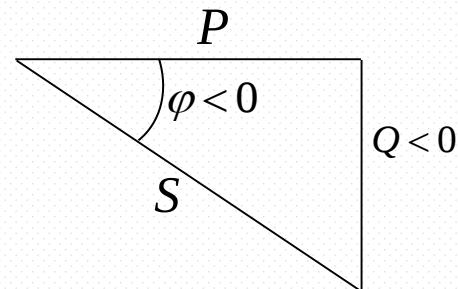
Trójkąt mocy

$$P^2 + Q^2 = U_{sk}^2 I_{sk}^2 \cos^2(\varphi) + U_{sk}^2 I_{sk}^2 \sin^2(\varphi) = U_{sk}^2 I_{sk}^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = U_{sk}^2 I_{sk}^2 = S^2$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



charakter indukcyjny



charakter pojemnościowy

Moce pobierane przez idealne elementy R,L,C

$$P = U_{sk} I_{sk} \cos \varphi$$

$$Q = U_{sk} I_{sk} \sin \varphi$$

$$S = U_{sk} I_{sk}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

a) rezystor

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

$$P = U_{sk} I_{sk} = R I_{sk}^2 = \frac{U_{sk}^2}{R}$$

$$Q = U_{sk} I_{sk} \sin 0 = 0$$

$$S = U_{sk} I_{sk} = P$$

b) cewka

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

$$P = U_{sk} I_{sk} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$Q = U_{sk} I_{sk} \sin \frac{\pi}{2} = U_{sk} I_{sk}$$

$$S = U_{sk} I_{sk} = Q$$

ponieważ $\frac{U_{sk}}{I_{sk}} = X_L \quad \Rightarrow \quad Q = X_L I_{sk}^2 = \frac{U_{sk}^2}{X_L}$

b) kondensator

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

$$P = U_{sk} I_{sk} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$Q = U_{sk} I_{sk} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -U_{sk} I_{sk}$$

$$S = U_{sk} I_{sk} = -Q$$

$$\frac{U_{sk}}{I_{sk}} = X_C \quad \Rightarrow \quad Q = -X_C I_{sk}^2 = -\frac{U_{sk}^2}{X_C}$$

Kompensacja mocy biernej

Większość odbiorników energii elektrycznej (np. silnik indukcyjny, piec indukcyjny) ma charakter rezystancyjno-indukcyjny. Pobierają one moc bierną indukcyjną, $Q=Q_L>0$

Przesył mocy biernej z elektrowni jest kosztowny m. in. zmniejsza przepustowość linii, zwiększa spadki napięć. Dlatego stosuje się kompensację mocy biernej.

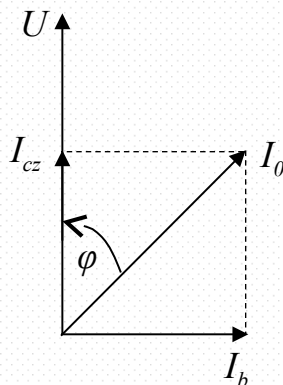
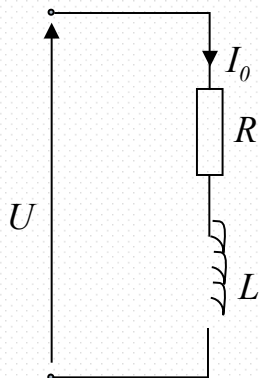
Idea kompensacji

Polega na wytwarzaniu mocy biernej o przeciwnym znaku przy odbiorniku.

W ogólnym przypadku zachodzi: $Q=Q_L-Q_C$

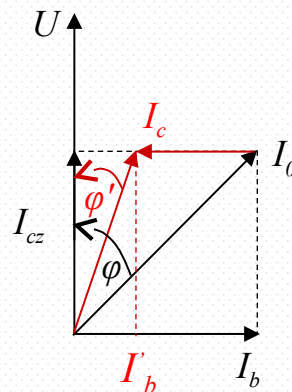
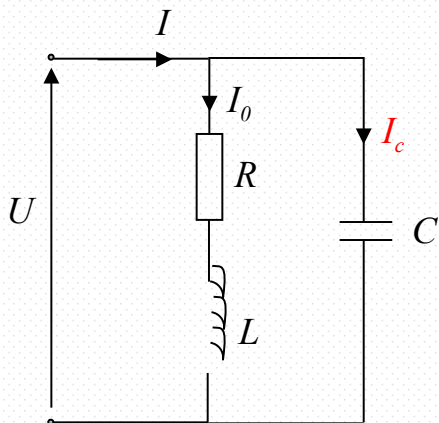
W przypadku odbiornika o charakterze RL aby uzyskać $Q=0$ wystarczy równolegle włączyć przy odbiorniku odpowiednio dobrany kondensator.

Przykład kompensacji odbiornika o char. RL



$$I_0 = \sqrt{I_{cz}^2 + I_b^2}$$

Jeżeli równoległe do odbiornika podłączymy kondensator to popłynie przez niego prąd I_c



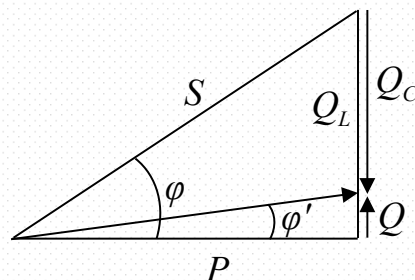
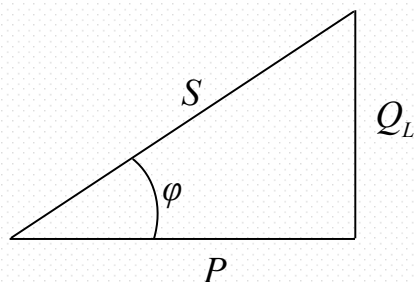
$$I = \sqrt{I_{cz}^2 + I_b'^2} < I_0$$

Prąd I_c kompensuje częściowo lub całkowicie składową bierną, zmniejszając prąd płynący w sieci tzn. $I < I_0$

Wnioski

- odbiornik wypadkowy ma kąt fazowy $\varphi' < \varphi$ ($\cos \varphi' > \cos \varphi$)
- nie zmieniła się wartość skuteczna prądu pobieranego I_0 przez odbiornik
- zmalała wartość prądu pobieranego z sieci z I_0 na I ($I < I_0$)

Dobór kondensatora



$$Q = Q_L - Q_C \quad \Rightarrow \quad P \cdot \operatorname{tg} \varphi' = P \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{U_{sk}^2}{X_C} \quad \Rightarrow \quad P \cdot \operatorname{tg} \varphi' = P \cdot \operatorname{tg} \varphi - \omega C U_{sk}^2$$

$$Q_L = P \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$$Q = P \cdot \operatorname{tg} \varphi'$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{P}{\omega \cdot U_{sk}^2} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')$$

w przypadku pełnej kompensacji (stan rezonansu prądów)

$$\varphi' = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\omega \cdot U_{sk}^2}$$

Zalety kompensacji

- zmniejszenie strat energii w liniach przesyłowych (mniejsza wartość skuteczna przepływającego prądu)
- zmniejszenie spadków napięć w przewodach linii i innych urządzeniach (np. transformatorach)
- możliwość przesyłu większej mocy
- zmniejszenie przekroju przewodów

Przykład obliczeniowy symulacja (eksperyment)

Dobrać wartość kondensatora kompensacyjnego do odbiornika o charakterze indukcyjnym o następujących parametrach znamionowych:

$P_n = 10 \text{ kW}$ – moc czynna odb., $I_n = 60$ – wartość skuteczna prądu pobieranego przez odb., $U_n = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$. Przyjąć po kompensacji $\text{tg}\varphi' = 0.4$

I. Wyznaczenie parametrów zastępczych odbiornika (RL) niezbędnych do symulacji

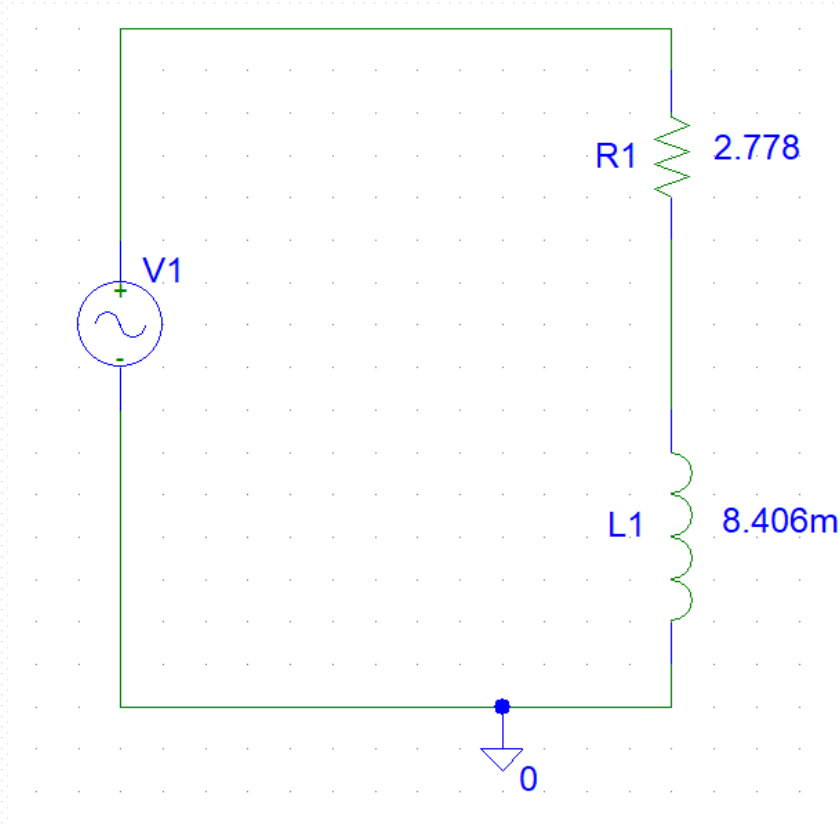
Z pobieranej mocy czynnej odb. można wyznaczyć rezystancję odbiornika

$$P = RI_n^2 = 10000 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{P}{I_n^2} = \frac{10000}{60^2} = 2.778 \text{ } \Omega$$

Z modułu impedancji wyznacza się indukcyjność L odbiornika

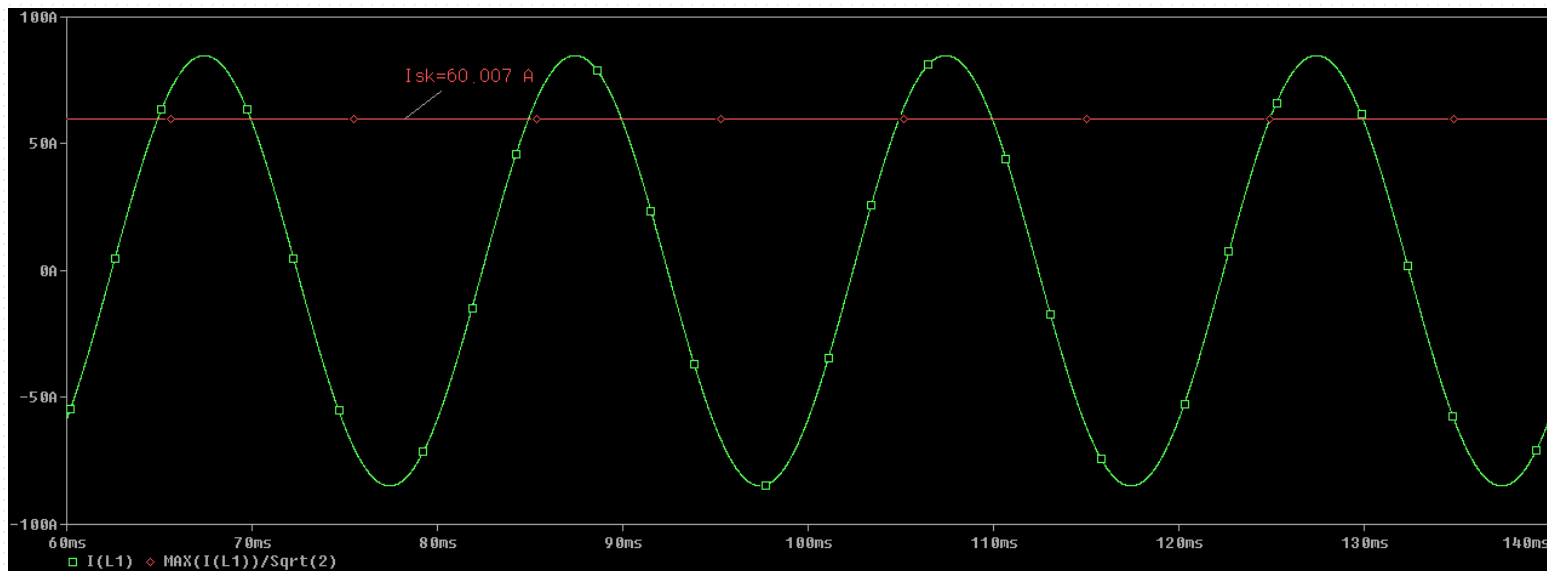
$$|Z| = \frac{U_N}{I_N} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad \Rightarrow \quad X_L = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \sqrt{3.833^2 - 2.778^2} = 2.641 \text{ } \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{2.641}{6.283 \cdot 50} = 8.406 \text{ mH}$$



Model odbiornika RL (program PSpice)

Wynik symulacji (program PSpice)



Wartość skuteczna prądu odbiornika jest taka sama jak w treści zadania

II. Dobór kondensatora kompensacyjnego

Wartość kondensatora kompensacyjnego obliczamy na podstawie wzoru

$$C = \frac{P}{\omega \cdot U_{sk}^2} (tg \varphi - tg \varphi')$$

$tg \varphi' = 0.4$ - z treści zadania

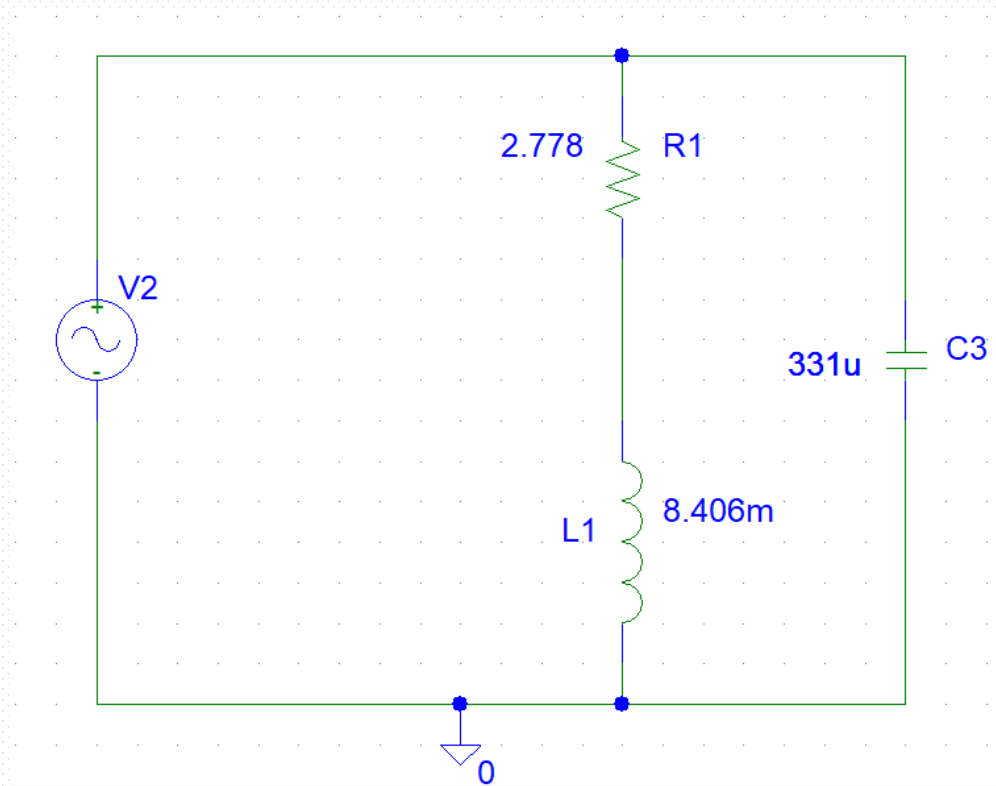
Obliczenie $tg \varphi$ odbiornika przed kompensacją

$$P = U_{sk} I_{sk} \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{P}{U_{sk} I_{sk}} = \frac{10000}{230 \cdot 60} = 0.725$$

$$tg \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \quad \sin \varphi = 0.689 \quad - \text{np. z jedynki tryg.}$$

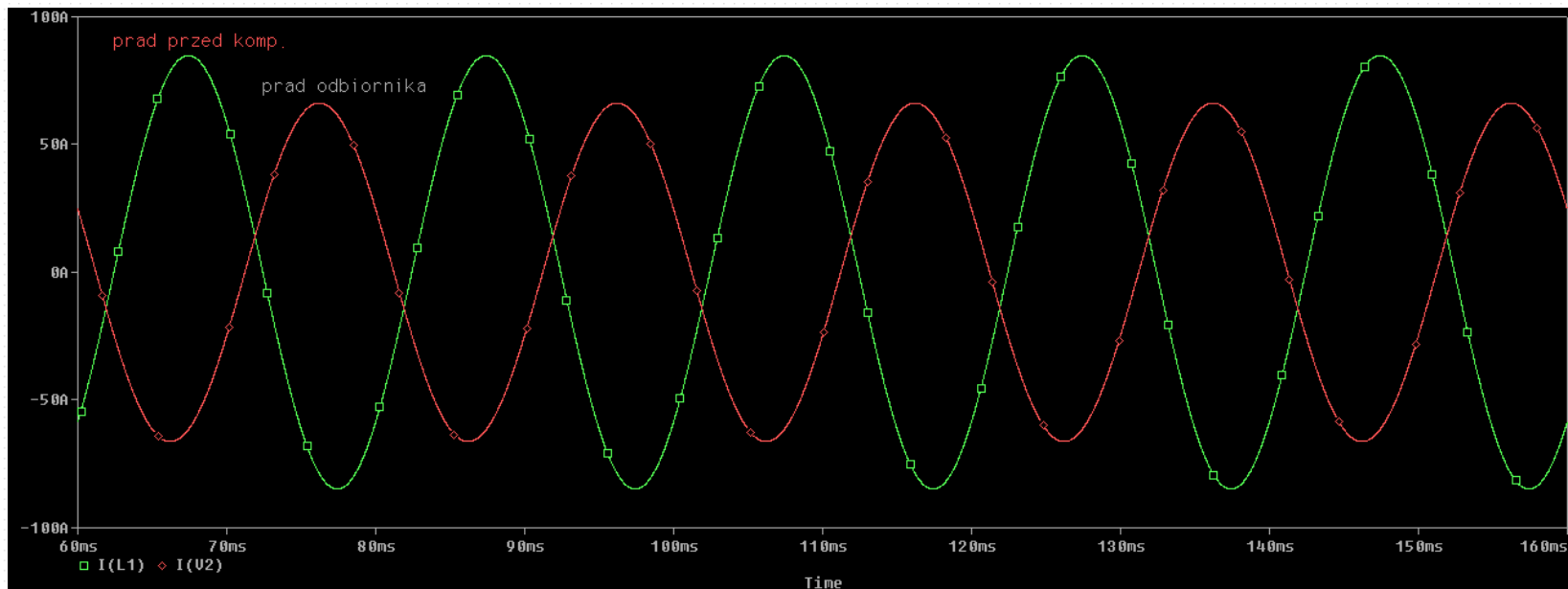
$$tg \varphi = \frac{0.689}{0.725} = 0.95$$

$$C = \frac{10000}{314.15 \cdot 230^2} (0.95 - 0.4) = 331 \mu F$$



Układ z kompensacją mocy biernej

Wykład 7



Wartość skuteczna prądu po kompensacji wynosi ok. 46.8 A (zmałała ok. 22% względem prądu początkowego).