



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika  Białostocka

Wydział Elektryczny
Katedra Elektrotechniki, Energoelektroniki
i Elektroenergetyki

Instrukcja do zajęć laboratoryjnych z przedmiotu
LABORATORIUM Z ELEKTROTECHNIKI

Kod przedmiotu:

EMS1A1005

PRĄDY I NAPIĘCIA W OBWODZIE

Numer ćwiczenia

LzE - 02

Autor

Jan Waśkiewicz
Adam Steckiewicz

Białystok 2025



Spis treści

1	Cel ćwiczenia.....	3
2	Wprowadzenie	3
2.1	Metoda praw Kirchhoffa	3
2.2	Metoda prądów oczkowych	4
2.3	Metoda potencjałów węzłowych	4
3	Pomiary.....	6
4	Literatura	9

Materiały przygotowane w ramach projektu „PB 5.0 – dostosowanie oferty dydaktycznej Politechniki Białostockiej do potrzeb nowoczesnej gospodarki oraz zielonej i cyfrowej transformacji” (nr umowy FERS.01.05-IP.08-0327/23-00) w ramach programu Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego 2021-2027 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego Plus.

Publikacja jest udostępniona na licencji Creative Commons - Uznanie autorstwa 4.0 (CC BY 4.0). Pełna treść licencji dostępna na stronie creativecommons.org.

Materiały dydaktyczne przeznaczone dla studentów Wydziału Elektrycznego PB.

© Wydział Elektryczny, Politechnika Białostocka, 2025



1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie i weryfikacja eksperymentalna praw Kirchhoffa oraz metody oczkowej i węzłowej wyznaczania rozptywu prądu i rozkładów napięć w obwodach prądu stałego.

2 Wprowadzenie

Najbardziej uniwersalnymi metodami obliczania prądów i napięć w złożonych układach elektrycznych są:

- 1) metoda praw Kirchhoffa;
- 2) metoda prądów oczkowych;
- 3) metoda potencjałów węzłowych.

2.1 Metoda praw Kirchhoffa

Pierwsze prawo Kirchhoffa mówi, że suma prądów wpływających i wypływających z węzła elektrycznego jest równa zero. Możemy to zapisać jako

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (1)$$

gdzie: I_k - prąd k -tej gałęzi węzła sieci; n - liczba gałęzi zbiegających się w danym węźle. Przyjmuje się przy tym, że prąd wpływający do węzła ma znak dodatni, a wypływający - ujemny.

Drugie prawo Kirchhoffa mówi, że suma napięć źródłowych i odbiornikowych w dowolnym oczku obwodu elektrycznego jest równa zero, co możemy zapisać następująco

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad (2)$$

gdzie: U_k napięcie k -tego elementu oczka; n - liczba elementów w danym oczku sieci. Przed rozpisanie równania (2) dla danego oczka powinniśmy oznaczyć na schemacie kierunek obiegu oczka oraz zwroty wszystkich prądów i napięć. Napięciom U_k nadajemy znak plus - jeśli są one zgodne z przyjętym kierunkiem obiegu oczka - natomiast znak minus, jeśli są skierowane przeciwnie. Napięcia na odbiornikach wyrażamy w funkcji ich prądów wykorzystując prawo Ohma.

Obliczenie rozptywu prądów w sieci tą metodą polega na napisaniu, a następnie rozwiązaniu układu równań wynikających z pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa. Napięcia na elementach obliczamy stosując prawo Ohma.

2.2 Metoda prądów oczkowych

Metoda ta polega na napisaniu, a następnie rozwiązaniu układu równań oczkowych. Liczba tych równań jest równa liczbie niezależnych oczek w sieci. Liczbę tę określa się ze wzoru

$$n = g - w + 1 \quad (3)$$

gdzie: g – liczba gałęzi, w – liczba węzłów w sieci. Potem należy wybrać oczka, dla których będziemy układać równania i oznaczyć kierunki „obiegu” tych oczek.

W przypadku sieci o dwóch niezależnych oczkach, układ równań oczkowych możemy zapisać następująco

$$\begin{cases} R_{aa}I_a + R_{ab}I_b = E_a \\ R_{ba}I_a + R_{bb}I_b = E_b \end{cases} \quad (4)$$

przy czym: I_a , I_b nazywane są prądami oczkowymi, R_{aa} , R_{bb} – rezystancjami własnymi oczek, R_{ab} , R_{ba} – rezystancjami wzajemnymi par oczek, E_a , E_b – napięciami źródłowymi oczek. Prądy oczkowe są niewiadomymi tego układu. Rezystancja własna oczka jest równa sumie rezystancji wszystkich gałęzi występujących wzdłuż danego oczka. Rezystancja wzajemna dwóch oczek jest równa rezystancji ich gałęzi wspólnej, wziętej ze znakiem minus, jeśli prądy oczkowe przepływają przez tę gałąź w przeciwnych kierunkach albo ze znakiem plus, jeśli te prądy mają kierunki zgodne. Napięcie źródłowe oczka jest sumą napięć poszczególnych źródeł występujących w oczku wziętych ze znakiem plus, jeśli są one skierowane zgodnie z prądem oczkowym, a ze znakiem minus, gdy są skierowane przeciwnie.

Rozwiązując układ równań (4) otrzymamy prądy oczkowe, na podstawie których obliczymy szukane prądy gałęziowe. Prąd w danej gałęzi jest sumą algebraiczną prądów oczkowych przepływających przez tę gałąź, przy czym prąd oczkowy jest brany ze znakiem plus, jeśli jego kierunek jest zgodny z kierunkiem prądu gałęziowego lub ze znakiem minus, gdy kierunki te są przeciwnie. Napięcia na elementach obliczamy stosując prawo Ohma.

2.3 Metoda potencjałów węzłowych

Metoda ta polega na zestawieniu, a następnie rozwiązaniu układu równań węzłowych. Pierwszą czynnością jest zamiana wszystkich źródeł napięciowych

na równoważne im źródła prądowe. Liczba równań układu jest równa liczbie niezależnych węzłów w sieci, którą wyznaczamy ze wzoru

$$n = w - 1 \quad (5)$$

gdzie: w – liczba wszystkich węzłów. Następnie dowolny węzeł oznaczamy jako "odniesieniowy" i przyporządkowujemy mu potencjał równy zeru, po czym zaznaczamy na schemacie potencjały pozostałych węzłów i układamy równanie dla każdego z nich. Ogólna postać układu równań dla sieci zawierającej dwa węzły niezależne może być zapisana następująco

$$\begin{cases} G_{AA}V_A + G_{AB}V_B = I_A \\ G_{BA}V_A + G_{BB}V_B = I_B \end{cases} \quad (6)$$

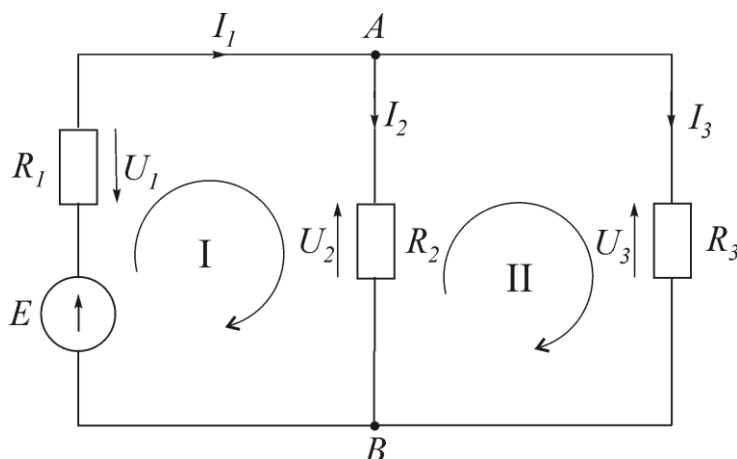
W równaniach tych przez V_A , V_B oznaczono **potencjały węzłów**, które są niewiadomymi tego układu. Wielkości G_{AA} , G_{BB} nazywamy przewodnościami (konduktancjami) **własnymi** węzłów i obliczamy sumując przewodności wszystkich gałęzi zbiegających się w danym węźle. Wielkości G_{AB} , G_{BA} nazywamy przewodnościami **wzajemnymi** pary węzłów A i B. Przewodność wzajemna pary węzłów jest równa wziętej ze znakiem minus sumie przewodności gałęzi łączących te dwa węzły. Wielkości I_A , I_B nazywamy **prądami węzłowymi**. Prąd węzłowy oblicza się jako sumę algebraiczną prądów źródłowych zbiegających się w danym węźle, przy czym wartość prądu bierze się ze znakiem plus, jeśli prąd źródła dopływa do węzła, a ze znakiem minus, gdy z tego węzła wypływa.

Rozwiązując układ (6) otrzymujemy wartości potencjałów węzłowych. Po oznaczeniu kierunków prądów w gałęziach przystępujemy do ich obliczania. Prąd w gałęzi jest sumą prądu przepływającego przez przewodność tej gałęzi i wydajności źródła prądowego z uwzględnieniem ich kierunków. Prąd przepływający przez przewodność obliczamy stosując prawo Ohma, czyli jako iloczyn przewodności gałęzi i różnicy potencjałów węzłów, między którymi znajduje się dana gałąź. Mając potencjały węzłów oraz prądy gałęziowe możemy wyznaczyć napięcie na dowolnym elemencie układu.

3 Pomiary

Zadanie 1

Przy użyciu płytki stykowej z zestawu doświadczalnego, połącz układ zgodnie ze schematem na Rys.1.



Rys. 1. Schemat układu do weryfikacji **praw Kirchhoffa** (E – źródło napięcia z zestawu doświadczalnego; R_1, R_2, R_3 – rezystory wskazane przez prowadzącego).

Realizując ćwiczenia skup się na następujących krokach:

- 1) Wykonaj pomiary napięć i prądów występujących w układzie za pomocą multimetru z zestawu doświadczalnego. Wyniki zapisz w Tab. 1.
- 2) Oblicz rozpyływ prądów i rozkład napięć w układzie stosując metodę praw Kirchhoffa (opisaną w rozdziale 2.1).
- 3) Obliczenia wykonaj dla parametrów znamionowych elementów układu. Wyniki zapisz w Tab.1.
- 4) Oblicz i zapisz w Tabeli 1 wskazane sumy prądów i napięć.
- 5) Wyciągnij wnioski z uzyskanych wyników.

Tabela 1. Wyniki pomiarów i obliczeń otrzymane przy weryfikacji praw Kirchhoffa

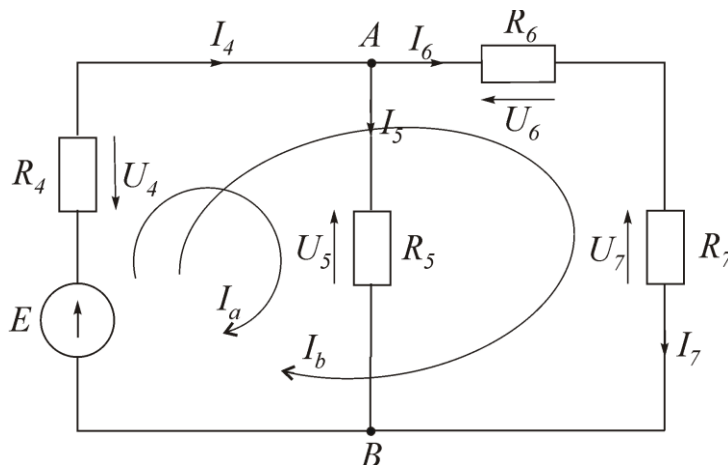
$E =$	$R_1 =$	$R_2 =$	$R_3 =$						
Metoda	U_1 (V)	U_2 (V)	U_3 (V)	I_1 (mA)	I_2 (mA)	I_3 (mA)	$\sum_A I_k$ (mA)	$\sum_I U_k$ (V)	$\sum_{II} U_k$ (V)
Pomiary									
Prawa Kirchhoffa									

Wniosek:

.....

Zadanie 2

Przy użyciu płytki stykowej z zestawu doświadczalnego połącz układ zgodnie ze schematem na Rys.2.



Rys. 2. Schemat układu do weryfikacji metody **oczkowej** (E – źródło napięcia z zestawu doświadczalnego; R_4, R_5, R_6, R_7 – rezystory wskazane przez prowadzącego).

Realizując ćwiczenia skup się na następujących krokach:

- 1) Wykonaj pomiary napięć i prądów występujących w układzie za pomocą multimetru z zestawu doświadczalnego. Wyniki zapisz w Tab. 2.
- 2) Oblicz rozpyły prądów i rozkład napięć w układzie stosując metodę prądów oczkowych (opisaną w rozdziale 2.2).
- 3) Obliczenia wykonaj dla parametrów znamionowych elementów układu. Wyniki zapisz w Tab. 2.
- 4) Oblicz i zapisz w Tabeli 2 wskazane sumy prądów i napięć.
- 5) Wyciągnij wnioski z uzyskanych wyników.

Tabela 2. Wyniki pomiarów i obliczeń otrzymane przy weryfikacji metody prądów oczkowych

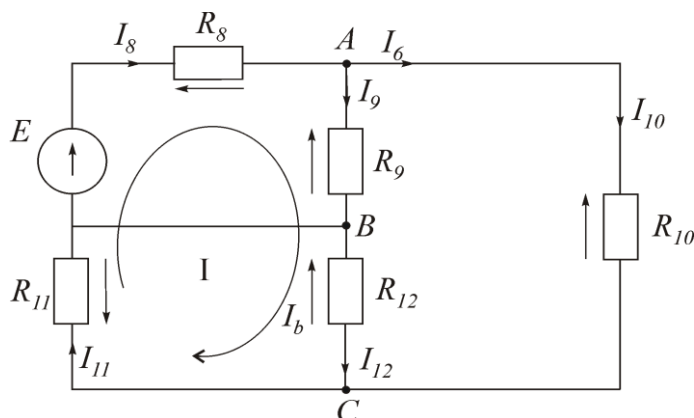
$E =$	$R_4 =$		$R_5 =$		$R_6 =$		$R_7 =$			
Metoda	U_4 (V)	U_5 (V)	U_6 (V)	U_7 (V)	I_4 (mA)	I_5 (mA)	$I_6=I_7$ (mA)	$\sum_A I_k$ (mA)	$\sum_a U_k$ (V)	$\sum_b U_k$ (V)
Pomiary										
Metoda oczkowa										

Wniosek:

.....

Zadanie 3

Przy użyciu płytki stykowej z zestawu doświadczalnego połącz układ zgodnie ze schematem na Rys.3.



Rys. 3. Schemat układu do weryfikacji metody **węzłowej** (E – źródło napięcia z zestawu doświadczalnego; $R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}$ – rezystory wskazane przez prowadzącego).

Realizując ćwiczenia skup się na następujących krokach:

- 1) Wykonaj pomiary napięć i prądów występujących w układzie za pomocą multimetru z zestawu doświadczalnego. Wyniki zapisz w Tab. 3.
- 2) Oblicz rozływ prądów i rozkład napięć w układzie stosując metodę potencjałów węzłowych (opisaną w rozdziale 2.3). Obliczenia wykonaj dla parametrów znamionowych elementów układu. Wyniki zapisz w Tab. 3.
- 3) Oblicz i zapisz w Tab. 3 wskazane sumy prądów i napięć.

Tabela 3. Wyniki pomiarów i obliczeń otrzymane przy weryfikacji metody węzłowej

$E =$	$R_8 =$		$R_9 =$		$R_{10} =$		$R_{11} =$		$R_{12} =$	
Metoda	U_8 (V)	U_9 (V)	U_{10} (V)	U_{11} (V)	U_{12} (V)	I_8 (mA)	I_9 (mA)	I_{10} (mA)	I_{11} (mA)	I_{12} (mA)
Pomiary										
Metoda węzłowa										
	$\sum_A I_k$ (mA)	$\sum_B I_k$ (mA)	$\sum_C I_k$ (mA)	$\sum_I U_k$ (V)						
Pomiary										
Metoda węzłowa										

Wniosek:



4 Literatura

Materiały elektroniczne

- [1] Moebs W., Ling S. J., Sanny J. i in., *Fizyka dla szkół wyższych Tom 2*, ISBN-13: 978-83-948838-2-9, 2020,
<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-2/pages/10-3-prawa-kirchhoffa>
- [2] FORBOT, *Dzielnik napięcia - co trzeba wiedzieć? Kiedy go NIE używać? Kurs elektroniki od FORBOT [#8]*, 2021,
[youtube.com/watch?v=t8oVIbg-lRA](https://www.youtube.com/watch?v=t8oVIbg-lRA)
- [3] Saeed K., Parfieniuk M., *Podstawy elektrotechniki i elektroniki dla studentów informatyki*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok, 2018,
pb.edu.pl/oficyna-wydawnicza/wp-content/uploads/sites/4/2020/11/Podstawy-elektrotechniki-i-elektroniki-dla-studentow-informatyki.pdf

Podręczniki

- [4] Bolkowski S., *Teoria obwodów elektrycznych*, WNT, Warszawa, 2022.
- [5] Osiowski J., Szabatin J., *Podstawy teorii obwodów Tom 1*, WNT, Warszawa, 2023